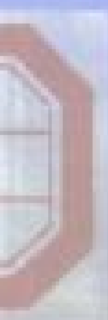


北京大学物理学丛书

The Series of Advanced Physics of Peking University

电动力学简明教程

俞允强 编著

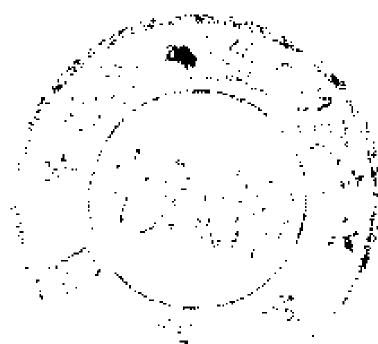


北京大学出版社 PEKING UNIVERSITY PRESS

北京大学物理学丛书(教材)

电动力学简明教程

俞允强 编著





北 京 大 学 出 版 社
北 京

The Series of Advanced Physics of Peking University

A Concise Course on Electrodynamics

Yu Yunqiang

Peking University Press
Beijing

图书在版编目(CIP)数据

电动力学简明教程/俞允强编著. —北京:北京大学出版社,1999
(北京大学物理学丛书)
ISBN 7-301-04245-0

Ⅰ.电… Ⅱ.俞… Ⅲ.电动力学-教材 Ⅳ.O442

中国版图书馆CIP数据核字(1999)第26433号

书　　名:电动力学简明教程
著作责任者:俞允强　编著
责任编辑:周月梅
标准书号:ISBN 7-301-04245-0/O·449
出 版 者:北京大学出版社
地　　址:北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　址:http://cbs.pku.edu.cn/cbs.htm
电　　话:出版部62752015　发行部62754140　编辑室62752021
电子信箱:zpup@pup.pku.edu.cn
排 版 者:北京因温特有限公司
印 刷 者:北京大学印刷厂
发 行 者:北京大学出版社
经 销 者:新华书店
850×1168　32开本　8.5印张　220千字
1999年7月第一版　1999年7月第一次印刷
印　　数:0001～3000册
定　　价:15.50元

内 容 简 介

本书是《北京大学物理学丛书》之一，是作者在三十多年教学的基础上编写的。内容包括经典电动力学基础、静电问题、静磁问题、电磁波的传播、电磁波的激发、狭义相对论基础、相对论性的物理学、运动电荷的电磁场、介质对电磁波的影响等。与现有电动力学的有关教材不同的是：本书定位为简明教程，“简”是选材精练，“明”是讲究教学技巧或艺术，作者正是考虑到基础课教学的特点，保留了理论的系统性和基本概念的清晰性。

书后附有习题和参考答案，还附有作者对本课程教学的说明和体会。

本书可作为高等学校物理系电动力学课教材。

《北京大学物理学丛书》
编委会名单

前　言

物理学是自然科学的基础，是探讨物质结构和运动基本规律的前沿学科。几十年来，在生产技术发展的要求和推动下，人们对物理现象和物理学规律的探索研究不断取得新的突破。物理学的各分支学科有着突飞猛进的发展，丰富了人们对物质世界物理运动基本规律的认识和掌握，促进了许多和物理学紧密相关的交叉学科和技术学科的进步。物理学的发展是许多新兴学科、交叉学科和新技术学科产生、成长和发展的基础和前导。

为适应现代化建设的需要，为推动国内物理学的研究、提高物理教学水平，我们决定推出《北京大学物理学丛书》，请在物理学前沿进行科学研究和教学工作的著名物理学家和教授对现代物理学各分支领域的前沿发展做系统、全面的介绍，为广大物理学工作者和物理系的学生进一步开展物理学各分支领域的探索研究和学习，开展与物理学紧密相关的交叉学科和技术学科的研究和学习提供研究参考书、教学参考书和教材。

本丛书分两个层次。第一个层次是物理系本科生的基础课教材，这一教材系列，将在几十年来几代教师，特别是在北京大学教师的教学实践和教学经验积累的基础上，力求深入浅出、删繁就简，以适于全国大多数院校的物理系使用。它既吸收以往经典的物理教材的精华，尽可能系统地、完整地、准确地讲解有关的物理学基本知识、

基本概念、基本规律、基本方法；同时又注入科技发展的新观点和方法，介绍物理学的现代发展．使学生不仅能掌握物理学的基础知识，还能了解本学科的前沿课题和研究动向，提高学生的科学素质。第二个层次是研究生教材、研究生教学参考书和专题学术著作。这一系列将集中于一些发展迅速、已有开拓性进展、国际上活跃的学科方向和专题，介绍该学科方向的基本内容，力求充分反映该学科方向国内外前沿最新进展和研究成果。学术专著首先着眼于物理学的各分支学科，然后再扩展到与物理学紧密相关的交叉学科。

愿这套丛书的出版既能使国内著名物理学家和教授有机会将他们的累累硕果奉献给广大读者，又能对物理的教学和科学研究起到促进和推动作用。

《北京大学物理学丛书》编辑委员会

1997 年 3 月

Preface

Physics is the foundation of natural sciences, a leading discipline of studying structures of matter and basic laws of motion. For several decades, driving by the demands of developing technology, the breakthrough in the studies of physical phenomenon and the laws of physics never end. During this period, all branches of Physics grew very fast and our knowledge of the basic laws governing the motion of the physical world was highly enriched. The growing of physics accelerated the progress of many physics related areas and technologies. The development of physics provided grounds and guidance for the birth and the growth of those new branches of physics, related areas and new technologies.

In order to catch up the main stream of the modernization and to give an impetus to scientific research and to improve teaching of physics in China, we decided to publish "*The Series of Advanced Physics of Peking University*". We invited those distinguished physicists and professors who worked in the frontier of physics to give series introductions to all branches of modern physics and recent developments in these fields. This series, as a consequence, provides textbooks and references for physicists and physics students in their studies of all branches of physics, related areas and technologies.

This series is divided into two sub-series of different levels, the first sub-series includes the textbooks of undergraduate physics written by experienced teachers in Peking University in

past decades. These textbooks were written concisely with deep insights and easier expressions, which adopt essences of physics textbook classics, explain fundamental concepts, laws and methods of physics in a systematic and rigorous way. In addition, these textbooks properly introduced the new approaches and the latest developments of physics for educational purposes. This sub-series is suitable for teaching of undergraduate physics for most universities and institutes in China. The second sub-series includes graduate textbook, references and academic writings. This sub-series focuses on the latest developments and accomplishments in the active subjects of relevant research with international interests and introductions to those of fast developing research fields. The topics of academic writings mainly cover all branches of physics, but it will be generalized to closely related areas.

We wish the publication of this series could provide an opportunity for leading physicists and physics professors in China to show their fruitful accomplishments to general audience and to give an impetus to teaching and research in physics.

Editorial board of

"The Series of Advanced Physics of Peking University"

March 1997

序

世纪之交的物理学

20世纪即将过去。物理学的革命，这场革命推动的整个自然科学和应用技术的伟大变革，以及这些变革对人类社会的影响，将作为这个世纪的一个重要标志而载入史册。这段令人神往的历史，给正处在世纪之交的我们以什么样的启示呢？

首先的启示是作为研究物质结构和运动的基本规律的物理学，总是生机勃勃、不断地开辟自己前进的道路的。1803年道尔顿提出了近代的原子论，认为世间万物都是由几十种不同种类的原子（那时只认识到三十来种）组成的。经过近一个世纪多方面的研究和争论，科学界接受了和发展了这个学说。到19世纪60年代，元素的数目增到六十多种，而且还认识到不同元素的性质是有内在联系的，门捷列夫的周期律描述了这种联系。19世纪末，物理学家们发现了电子、α粒子、放射性、X射线……发现原子是可以改变的，原子不是物质构成的最小单元。20世纪初卢瑟福建立了原子结构的“行星”模型。探讨原子结构模型和经典物理学之间的矛盾，导致了量子力学的诞生，产生了现代原子、分子物理、凝聚态物理、原子核物理……历史也许有某种类似性。在这个世纪之交，物理学又正在进入一个新的层次。本世纪50年代，人们找到作为

构成物质的基石的基本粒子有三十来种，也认识到它们之间的相互作用和相互转化。探索这些“基本”粒子的更深层次的构造的努力，近三十年来取得十分辉煌的成就。三代夸克和三代轻子的粒子模型、电弱统一理论和量子色动力学，这被称作粒子物理的标准模型的建立以及它在各方面的成功，正是标志着物理学正在进入物质世界的一个更深的层次，毫无疑问这将是物理学历史上一个具有划时代的意义的大事。但是，大多数的物理学家都会同意，从本质上说，目前的标准模型还是一个唯象的模型。在欢呼它取得的多方面的胜利时，也要看到同时提出了一系列带本质性的问题。也许可以说，进入这个新层次将带来的最本质的新的物理，还没有来到我们中间。19 世纪末的物理学家没能猜测到，进入比原子更深层次的探索，会在什么时候和在哪点上带来新的物理，20 世纪末的人们也不能奢望会比前辈高明多少！

20 世纪物理学的革命，表现出人类理性思维的伟大胜利。狭义相对论，特别是广义相对论，以它深邃的思考，严整的形式和美丽的表述，震撼着一代又一代的物理学工作者的心灵。但是，爱因斯坦也在他那无与伦比的思考导致的宇宙模型面前困惑了。感谢近四十多年来一大批物理学家和天文学家辛勤的努力和非凡的勇气，这个难以想象的革命性的关于宇宙的概念和图象建立起来了，并得到科学界多数人的认同。在大致一百五十多亿年前，宇宙从一个具有无限大的密度和具有无限大的时空曲率的点开始了。人们猜想，在宇宙膨胀、密度和温度降低中，到 10^{-44}秒时，重力相互作用和其他相互作用分离开来；到

10^{-36}秒时，强相互作用和电弱相互作用分离；直到10^{-10}秒时，弱相互作用才与电磁相互作用分离，世界变成了我们现在所处的有四种基本相互作用的世界。到10^{-6}秒时，夸克开始结合成强子，也许应当说，只有从此之后的物理才是当代物理学家可以比较有把握来谈论的。直到10^{12}秒（也就是三万多年）后，原子才开始出现。这样一个综合了亚核子尺度（小于10^{-14}厘米）的物理和宇观尺度（大于10^{24}厘米）的物理的宇宙演化模型的建立，可以说是人类认识史上一个最具有革命性的、划时代的伟大事件，当代人还难以全部理解它的意义。这个宇宙学的标准模型和近年来天体物理学家取得的辉煌的成就，在物理学的面前提出了十分严峻的具有本质的挑战。如何理解这样有限而无界的时空和它的奇点？什么是在这样演化中的物质和运动规律？为什么宇宙学中有那么多"巧合"？……总之，面对着如此壮观而又如此神奇的宇宙之谜，除了由衷的赞美和敬佩，人们不禁想起爱因斯坦的话："自然界最不可理解的就是它竟然可以理解！"

本世纪物理学的发展给我们的又一个教益是：物质世界是有层次的，反映物质世界的物理学规律也是有层次的。每一层次的物理都植根于更深层次的物理学。但是，每个层次的物理都是在真实的意义上不可穷尽的。在大自然千姿百态的丰富性面前，那些断言某某学科将不会有什么发展的说法总是被事实所粉碎的。经典力学、经典电动力学并不因为量子力学、量子电动力学的发展而被排斥出物理学，近年来我们还不停地学习它们新的、有深刻意义的进展。光学和凝聚态物理学半个世纪来的巨

大的、令人应接不暇的发展提供了最能说服人的例子。也许人们常常由于赞颂它们在实际应用上的威力的同时，不够强调它们在物理学学科上的意义。但如果我们想到在当代粒子物理和宇宙学中最重要的观念，如相变、对称性破缺、拓扑性缺陷、红外发散等等，都首先来自凝聚态物理学，而当代凝聚态物理又都广泛地而且本质地使用量子场论的语言和技术时，我们就会确信物理学的丰富性、多样性和统一性，“只有一个物理学”！

在 20 世纪，物理学的基本概念和技术已被应用到所有的自然科学领域。物理学与其他自然科学学科之间的边缘领域，一定意义上是当代自然科学中最富于获得丰硕成果的机遇的领域。边缘领域的发展，又反过来丰富、边深和支持了物理学本身的发展。量子力学和现代物理实验技术的应用，大大推进了现代化学的发展。对分子结构、性能和反应机理的研究，又丰富和推动了现代物理的进步。而且，如果没有现代化学的支撑，现代物理学中好些分支学科都不能产生和发展。地球科学、生命科学与物理学的边缘领域的发展，也将会是类似的情景。特别令人感到兴奋的一个新事物是近二三十年复杂性科学的发展。数学、物理学，特别是物理学与化学、地球科学、生命科学、各种应用技术科学的边缘领域研究的发展，都使人们相信，在复杂性(多维度，多组元，非线性，非平衡和开放的)系统的结构、性能和演化中，有一些具有普遍性的运动规律和运动模式。人们自然回想到，开始于上一世纪中叶的研究能量守恒和转化的热力学和分子运动论的发展，本世纪统计物理和涨落理论的发展。有理由相信一门

有重要的基础科学意义的学科，复杂性物理正在形成。它现在已经显出可能对物理学中一些最基础的问题，如必然性和随机性，无序化的倾向和有序结构的生成，不同层次的结构的自相似性等，作出有深刻物理意义的回答。也许，历史会表明，这也是人类认识史上又一个划时代的事物，同时，无疑地会对化学、地球科学、生命科学、认知科学和各种应用技术发生巨大的影响。

物理学作为一门最基础的自然科学，它的发展动力是深深地植根于人类对真理的非功利的追求。但是，历史的发展将越来越有力地证明，正是这种非功利的追求给人类带来最大的收益。本世纪发生的主要源于物理学的进展的技术革命，就是最有说服力的例子。当代技术进步的主要推动力来自纯学科性的基础研究。研究室和实验室中纯学科性的研究转变为重要的应用技术，实际生产和社会发展中遇到的问题转化为有基础学科意义的研究课题，两者关系愈来愈密切，周期愈来愈短。与之相应，在现代，杰出的基础科学研究人材和优秀的应用技术开发人材在科学素质上的要求变得更加一致了。在世纪之交，无论是制造业还是服务业，也无论是材料、信息、能源、交通、环境等技术部门，都在呼唤着新的技术变革，而认真考察就会发现，多数这些变革都主要基于物理学近年的进展。21 世纪物理学毫无疑问仍是技术进步的主要源泉。

物理学的发展从来就对人类社会思想、文化发生巨大影响。20 世纪的物理学革命就更是这样。人类社会进步的一个主要动力便是科学精神，现代科学精神的典范和集中的反映就是现代物理学。我国是一个文明古国，在历

史上曾经对人类的文化和科学发展做出过光辉的贡献。但是，我国接受近代科学的时间还很短，现代科学的精神实质和思维方式扎根我国还要做艰苦的努力。有些人跟着西方一些比较浅薄的哲学流派的后面，宣扬一些贬低和反对现代科学精神的言论，甚至把当代社会中由于社会矛盾而造成的后果，都归罪到现代科学精神上。这当然是完全错误的。以现代物理学为代表的科学精神，是人类进步的一面旗帜，它将高高飘扬在未来的岁月中。

当我们站在新世纪的门槛上，回顾 20 世纪物理学的辉煌时，会更加确信，在 21 世纪物理学将会同样辉煌。那些有幸进入物理学工作者的行列的年青朋友，历史将会证明，你们的选择是完全正确的。

中国科学院院士 甘子钊

1997 年 4 月

作者前言

80年代在北京大学听课的进修教师很多。有好几位老师曾建议我把电动力学的讲稿整理成书，我却一直对此很犹豫。当时国内已出版了很多种电动力学教材了。由于各校的讲授都是以教育部的部颁大纲为基础的，各种教材的框架很接近，差别是次要的。如是这样，有必要再写一本吗？而现在我终于应北大出版社之约，编写了这本《电动力学简明教程》。在正文之前，我很想先与读者交流一下对基础课教学的想法。

我从1961年开始在北京大学讲授量子力学以来，除"文化大革命"时期中断外，前后已陆续讲了近30遍基础理论课了。我主要讲授理论力学和电动力学两门课。30多年的教学经历使我对在物理系教四门基础理论课(俗称四大力学)的甘苦有深刻的感受。这四门课是物理系学生在中间两年的重头课。同学们普遍对它很看重，学得很投人。这些课不仅使学生在知识上获益，而且常在思维方法上也有很大的收益。人们常评价物理系毕业生在工作中有后劲，这里无疑有四大力学教学的积极作用。但是积极作用仅是事情的一个方面，它同时也有消极作用的方面。

70年代末，我在国外工作进修时接触了一些外国的大学生和研究生。多年教学的习惯使我把他们的教学状况与我们的作了对比。我意识到他们与我们的差别很鲜明。在大学的基础理论训练方面，他们不如我们要求得高。我们在国外的研究生常能在考试成绩上超过他们，与此是有很大关系的。但是他们的长处也很明显。在知识结构上，外国的学生常对科学的前沿问题很感兴趣，了解得也较多；而我们的学生却几乎相反。在思维方法上，外国的学生一般较善于独立思考，容易产生不同见解；而我们的学生却习惯于体

会书本，服从书本，很少怀疑。的确，我们的长处是有用的长处。但我们的短处也决不是次要的。

对比之下使我感到，我们把四大力学课讲授得很充实，习题和考试的要求提得很高，这是一种缺点性的优点。缺点远不在于它使学生负担很重，而在其后果。它使学生疲于奔命地追逐已成熟的书本知识，而没有可能顾及科学发展的现状和发现自己的兴趣。这正是多数学生对科学前沿问题关心得很少、知道得也很少的原因。另外，对学生在思想方法方面的消极影响我也有感受。有些成绩很好的学生只习惯于欣赏成熟的物理理论的美，而对前沿领域不成熟的部分却引不起兴趣。这使得他们在学校里能成为好学生，但在以后的工作中却成不了好的研究者。我们应当着眼于培养物理研究工作者，物理学中正在发展中的部分才是它生命力的所在，因而我们的教学所造成的这些弱点应看成是实质性的。

80 年代中，我正在物理系与秦旦华老师轮流主讲电动力学。当时胡宁先生曾在系里强烈地呼吁过削减四大力学。胡宁先生是我国理论物理界的一位有成就的前辈。他一辈子从事理论研究，但他依然感到没有必要为学生作这么多的理论准备。他的意见和我当时已产生的感觉是一致的。我虽然非常同意，但是却不敢真的这样做。在当时的物理系里，学生向国外考研成风，偏高的教学要求对学生应付考试是有利的。因此，相反的看法或做法是学生和领导都不愿接受的。应付考试的能力在我国被看成是一种重要的能力。教师要反其道而行之，须承受很大的社会压力。这使我意识到，这种改革是有得有失的问题。要使上面的看法得到认可，须对得与失作出认真的权衡。

现行的教学大纲大体上是以 50 年代的部颁大纲为基础的。回过头看，半个世纪前的那次改革应当肯定。它使我国的物理教学与当时的科学发展接上了轨，它对培养一代能走向研究前沿的物理工作者起过重要的作用，但是在基础理论教学上的要求偏高也随之产生，让我们具体地作些分析。

在物理系的毕业生中，将来做实验研究的人占大部分。实验工作者无疑也需要系统的基础理论训练，因为只有胸怀全局，才能在思考问题时高瞻远瞩。此外，清楚的物理概念是好的实验工作者所不可缺的，而这正是他们的理论素养的重要体现。因此在我看来，这些基础理论课在物理系的培养计划中应保留下来是毋庸置疑的。但是在这些课的教学中，“尽量为学生准备他们将来可能有用的知识”是一种很糟糕的观念。在每一种基本理论基础上的引申，不管是概念上、方法上或应用上的引申，都肯定是有用的知识的一部分，但它决不是必须在大学里为学生准备的那一部分。我想通过调查很容易证实，不管是对实验的或理论的工作者，要在研究中用到大学教科书里现成的公式或求解方法的机会是很小的。做研究的过程不仅是一个深入的过程，同时也是一个拓宽基础知识的过程。想在大学里过多地为学生事先准备好可能用到的细节知识是难以行之有效的。我自己是理论工作者，我是从理论研究的角度体会到这一点的。

基于上面的想法，我把我准备写的教科书定位为简明教程。“简”是取材问题，而“明”则是教学技巧问题。我认为，基础理论课中应保留的主要是理论的系统性和基本概念的清晰性。在这基础上的引申是次要的，应适可而止。这样简单的概括可能很难使别人同意或反对，这正是我写本书的主要动机，我想用这本书来具体地体现我的看法。这样，我的看法是否对，以及它们是否得到了正确的反映，就会容易判断。对此，我非常希望听到同行教师和学生们支持或反对的意见。

说到这里，我不能不提到理论联系实际的问题。在60年代的教改中曾强调过“联系实际”的原则。现在的年轻教师可能很难想像我们当时曾为体现这一原则而付出过何等巨大的精力。教师们曾力图在基础理论课中引入一些接近实际的问题。在那个年代出版的教科书中很容易看到这种努力的痕迹。但在四大力学范围内却至今留不下一个成功的范例，而不成功的例子却很多。显然“联

系实际”并不是一个错误的原则，但是它却造成了认识上的一个误区。任何实际问题都有很大的综合性，因此掌握基础理论和解决实际问题之间有着巨大的差距。为在基础理论课中引人实际问题，常常必须对实际问题作不实际的简化甚至扭曲。因此这样做对培养学生解决实际问题的能力是无助的。我认为，现在是清除这误区的时候了。

与此有关的是习题训练的作用问题。人们常把它与培养解决实际问题的能力联系在一起。学生在学习理论课的过程中必须伴随有习题训练，这是无疑的。甚至可以说，没有习题训练就不能掌握基础理论。但是做难题并不意味着更接近于培养解决实际问题的能力。实际上，多数难题更接近于智力测验，我看没有重要价值。但是让学生少做难题，势必影响他们的应试能力。这就涉及到得失相较的问题。

教学内容从“简”及习题训练从“易”会导致“失”。想赢来“得”的一面是什么？这是个重要问题。我认为应这样做的着眼点有两方面。物理学在近半个世纪内有很大的发展。值得关注的新兴分支很多，相应的理论基础也已复杂多了。今天与半个世纪前已很不一样，学好四大力学已不能算为研究各前沿领域做好了理论准备。知识宝库越来越庞大，基础部分也越来越庞大，这是必然趋势。因此对已成熟的知识，我们在教学中只能摘取其很少的精华部分，否则教学无法适应时代的发展。这是一方面。另一方面是现有基础课与前沿课题的距离在拉大，若基础课过多地吸引了学生的精力，势必影响学生对前沿问题的兴趣。值得再次强调，对于物理学讲，后者才是它生命力的所在。若教学状况造成学生对前沿课题不了解，甚至不感兴趣，这应被认为是大的偏差，而不是小缺点。因此我认为，这里的问题不仅是“得”大于“失”而值得做的问题，这其实是大势所趋。

我已经尽量直率地说明了我对学科改革方向的看法。在有得有失的问题面前，人们必然会仁者见仁、智者见智。我想起的作用

仅仅是抛砖引玉。无论如何，这问题本身是重要的，我希望能引起更多同行的重视。半个世纪过去了，物理教学框架需要有大的调整，这是时代的要求。但是，这显然不是某位教师能做的事。

最后，我愿向北京大学出版社的周月梅同志表示诚挚的感谢。没有她的推动，我是很难下决心做这件事的。在最终写完全书之后，我的感觉是做了一件值得做的事情。同时我也必须声明一下，若我的看法有错误，则与她完全无关。责任全在我自己身上。

俞允强

1999 年 5 月于北京大学物理系

目　　录

* * *

引　言

本课程的全称是《经典电动力学和狭义相对论》，简称为电动力学。

我们将要学习的电动力学是宏观物体电磁作用的动力学理论。它包括三方面的问题，即带电体如何产生电磁场的问题，电磁场自身运动的问题以及电磁场如何影响带电体的问题。作为一门基础理论课，它的任务是系统地阐述有关的概念和处理问题的理论方法。

从历史讲，静电库仑定律是人们最先定量地认识到的电磁学规律。19 世纪初期进一步发现了电流产生磁场的规律和磁场感应产生电场的规律。这些规律的发现和场概念的建立是电磁学的一个重大进展。它一方面使人们对电磁场的认识深入了一大步，同时它为电磁学的工业应用奠定了基础。至 19 世纪中后期，麦克斯韦理论的建立以及电磁波的成功产生是电磁学发展的一个丰碑。后者证实了前者是电磁作用的一般规律，从而使各种宏观电磁问题的研究有了统一而全面的基础。

麦克斯韦理论得到证实的时期正是物理研究从宏观向微观发展的时期。电子和原子作为实体存在的实验证实是后者的标志。由此人们开始可能从微观机理来认识宏观过程。而在研究微观过程时，人们陆续发现了一些不能由麦克斯韦方程解释的电磁作用现象。原子光谱线规律的无法解释，原子经典模型的失败，光电效应规律的无法解释等是这方面的典型事例。今天已为物理工作者周知，当时已成熟的物理理论在这些现象上的失效是微观客体的量子性的反映。微观地看，光不仅是波，而且也有粒子性的一面。同样，微观的带电粒子不仅是粒子，而且也有波性的一面。于是，人们

逐渐深入地认识到，已被大量实践证实的牛顿力学理论以及麦克斯韦电磁理论虽然是宏观物理学的基础，但它们须在物体的微观组元的量子性没有显著表现时才适用。因此现在把它们称作经典力学和经典电动力学。

微观客体的电磁作用理论是量子电动力学。它建立在 20 世纪的 30 年代。这理论建立后，它顺利地经受住了很精密的实验检验。但是它并没有穷尽人们对电磁作用的认识。人们在 20 世纪中期逐渐意识到，在微观本源上，自然界的相互作用只有四种。在宏观现象中表现很丰富的各种力在本源上都是引力和电磁力。这是自然界仅有的两种长程力。此外还有两种短程力，它们被简单地称为强作用力和弱作用力。使质子和中子结成原子核的力是强作用力的一种典型表现。导致原子核 β 衰变的则是弱作用力的效果。60 至 70 年代，人们进一步发现，电磁力和弱作用力是同一种本源的力在低能现象上的不同表现。如同电力和磁力统一后被称为电磁力一样，这种统一力被叫做电弱作用力。电弱力的统一理论已得到大量很细致的高能实验的检验，它已成为不可动摇的基础物理理论的一部分。此后人们一直在试图证实电弱力与强作用力，甚至引力都统一的思想。至今这些努力还没有十分肯定的成果。

本课程将限于学习经典电动力学，而不涉及微观的电磁作用理论。虽然宏观物体都由微观粒子组成，但是在绝大多数宏观电磁现象中，内部的微观机理并不起显著作用。因此经典电动力学构成了研究宏观电磁现象的理论基础。这是我们值得把它当物理学基础知识来学习的主要原因。同时也值得指出，有些宏观电磁现象背后的微观机理起着重要作用，经典电动力学对它们是不适用的。

我们将在正文的第 1 章中建立经典电动力学的普遍规律。后继的 4 章将以这些基本规律为出发点，分别讨论四类电磁问题。它们分别是静电问题、静磁问题、电磁波的传播问题和电磁波的激发问题。这 5 章构成了整个宏观电动力学的核心。

狭义相对论是电磁学发展的产物，但它本身并不是电动力学

的一部分。狭义相对论的要点是重申了伽里略的相对性原理，即一切惯性系是等价的。为了使电动力学与相对性原理一致，导致了时间与空间相统一的观念。这是人们对时空认识的一个飞跃。因此人们常说相对论是时间和空间的物理理论。其实相对论对物理学的影响主要在强调了一切基本物理规律须服从相对性原理。本书将在第 6 章中讨论相对论的时空观念以及由此引申出的相对性原理的数学表述。第 7 章中讨论相对性原理对物理学的影响。

最后两章是用经典电动力学研究微观粒子的电磁作用过程。如上所述，原则上微观电磁作用服从量子电动力学。但对于有些微观过程，事实表明经典电动力学依然适用。我们将在本书的末尾讨论经典电动力学的适用范围问题。

第1章　经典电动力学基础

1.1　静电场的方程式

我们都已熟知，静止电荷间的相互作用规律是库仑定律．它是第一个被人们认识到的电磁学定量规律．这规律可概括如下：

若有 N 个静止电荷，分别携带电量 $q_1,q_2,\cdots,q_N$，则任一电荷 q_j 受到其他电荷的作用力为

$$\boldsymbol{F}_j=\sum_{i\neq j}k\frac{q_iq_j}{|\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_i|^2}\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_i),\tag{1.1.1}$$

其中 $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_i)$ 表示 $\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_i$ 方向上的单位矢量．

本书将一直用这样的方法来标记某方向的单位矢量．(1.1.1)式中的 k 是与单位制有关的比例常数．本书将采用国际单位制，简记 I.U.．在这单位制中，把比例系数写成 $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$，实验定出的值是

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}=8.988\times10^9\ \text{I.U.}.\tag{1.1.2}$$

库仑定律本身并不涉及电力的传递机制．但是人们今天已确切知道，带电体周围存在电场，而电力作用是通过电场实现的．因此，让我们直接用电场的概念来阐述库仑定律的含义．

电场强度 $\boldsymbol{E}$ 被定义为单位电荷在场中所受的力．若电荷 q_0 在场中某处受力 $\boldsymbol{F}$，则该处的电场强度为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{F}/q_0.\tag{1.1.3}$$

库仑定律首先告诉我们，一个点电荷 q 周围的电场分布为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2}\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}),\tag{1.1.4}$$

其中的 $\boldsymbol{r}$ 以源电荷所在位置为原点. 这式子表明，电场强度的大小与源电荷的电量成正比，而与距离平方成反比. 电场强度的方向则与距离矢量相一致. 这些是库仑定律的基本要点.

此外，库仑定律还告诉我们，若源电荷 q_1 单独存在时产生电场 $\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r})$，源电荷 q_2 单独存在时产生电场 $\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r})$，则 q_1 与 q_2 同时存在时，它们产生的电场为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r}). \qquad (1.1.5)$$

场的这种性质被称为叠加原理.

值得注意，电场服从叠加原理并不是自然而然的结果，它是库仑定律作为经验规律的一部分. 从物理上讲，叠加原理意味着任一源电荷产生的电场与是否有其他源电荷存在无关，即各个源电荷对总电场的贡献是独立的. 这性质并不是任一种物理场所必然或必须具备的. 因此我们强调，静电场满足叠加原理是实验证实的结果. 在数学上，这性质暗示了电场强度应满足线性的偏微分方程. 下面即将看到这一后果.

有了库仑定律，对于已知电荷分布下求电场的问题就解决了. 一般地，引用电荷密度 ρ 来描写源的电量分布，它产生的电场为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\rho(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\,\mathrm{d}\tau', \qquad (1.1.6)$$

这里用 $\boldsymbol{r}$ 代表场的空间变量，而用 $\boldsymbol{r}'$ 代表源的空间变量(图 1.1).

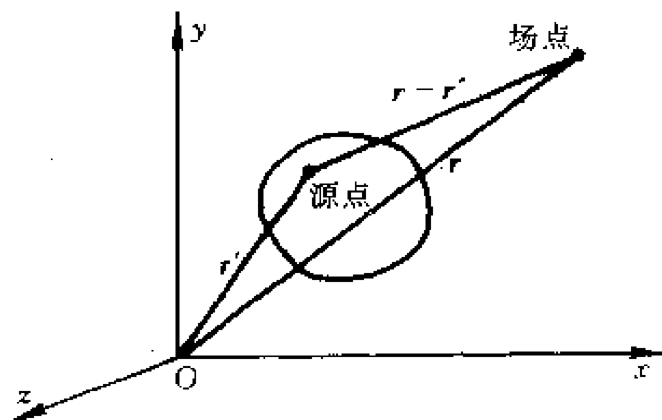


图 1.1　源点与场点的标记

式中的积分是对源变量作的. 在本书后面遇到场量对源的积分关系时,我们将沿用这写法. 在源电荷为点状分布时,电荷密度用 δ 函数表示,

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \sum_i q_i \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i). \tag{1.1.7}$$

代回(1.1.6)式,得到的将是库仑定律的原始形式.

可是并非在所有静电问题中,电荷分布都能事先被知道. 举个例可看清这点. 设电场的源是一个带电量为已知的导体. 它产生的电场取决于电量在导体表面的分布,而电荷的分布又取决于表面附近的电场. 这两方面是相互制约的. 在平衡后,导体表面上的电荷分布及相应的电场都确定了. 但是我们却无法预先知道源电荷的分布. 因此,这样的问题就无法直接由库仑定律来解决. 为在理论上处理各种静电问题,我们需要借助库仑定律来导出静电场所满足的微分方程.

上面已指出,静电场应满足线性的偏微分方程. 为此我们尝试计算电场强度的散度和旋度,因为这是对矢量场的最基本的线性微分运算.

按数学上的高斯定理,有

$$\iiint \nabla \cdot \boldsymbol{E} \, \mathrm{d}\tau = \oiint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}. \tag{1.1.8}$$

因为电场满足叠加原理,我们可以只把单个电荷的电场公式(1.1.4)代入右边. 以电荷所在点为原点,元面 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 所张的立体角是

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}}{r^2}. \tag{1.1.9}$$

注意这样定义的立体角可正可负,它取决于 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 与 $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r})$ 的夹角. 当这点电荷在闭面之内,闭面对原点张的总立体角为 4π. 而当电荷在闭面之外,则闭面所张的总立体角为零(图 1.2). 于是有

$$\oiint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \iint \mathrm{d}\Omega = \begin{cases} q/\varepsilon_0, & \text{电荷在闭面内;} \\ 0, & \text{电荷在闭面外.} \end{cases} \tag{1.1.10}$$

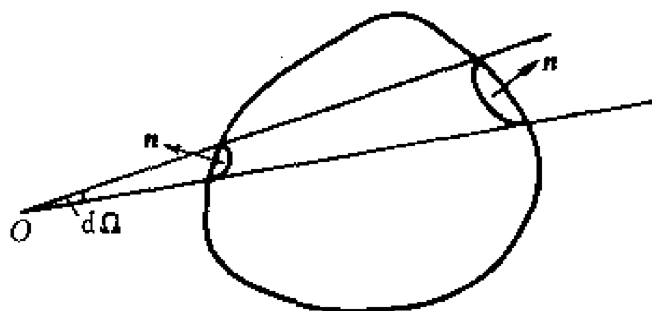


图 1.2　闭面对 O 点的立体角

对于电荷为任意分布的情形，只需简单叠加即可．因此在一般情形下，(1.1.8)式的右边应是闭面内总电量的贡献．于是写成

$$\iiint \nabla \cdot \boldsymbol{E} \mathrm{d}\tau = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint \rho \, \mathrm{d}\tau. \tag{1.1.11}$$

考虑到这积分体积是任意取的，所以两边的被积函数必须相等．这样就得出了电场强度满足的一个微分方程，

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho / \varepsilon_0. \tag{1.1.12}$$

作为偏微分方程，只有(1.1.12)不构成完备的方程组．因此我们再计算电场强度的旋度．由数学上的斯托克斯定理知

$$\iint \nabla \times \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}, \tag{1.1.13}$$

把单个电荷的电场公式(1.1.4)代入其右边，注意到 $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mathrm{d}r$（图 1.3)，我们立即看出，回路积分的值恒等于零．因此有

$$\iint \nabla \times \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = 0. \tag{1.1.14}$$

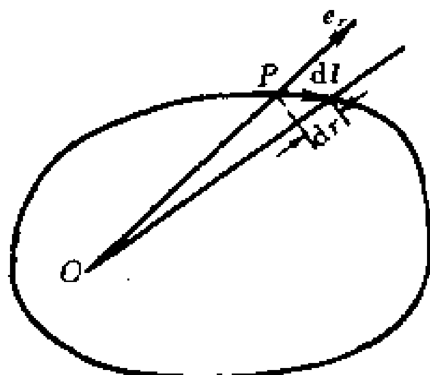


图 1.3　回路上的 $\boldsymbol{e}_r \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$

同样由于积分面的任意性，它意味着被积函数为零，即

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0. \tag{1.1.15}$$

它是电场强度所满足的又一个微分方程. 这方程表明静电场是一种无旋场.

把(1.1.12)和(1.1.15)联立，它们构成了一组完备的线性偏微分方程组. 在第2章中将讨论，这方程组须配合什么边界条件才会有唯一解. 现在仅指出，当附加地要求在无穷远处电场强度为零，则这方程组有唯一解，且它就是库仑解(1.1.6). 由此足以说明，这方程组与库仑定律是等价的. 从后者导出前者的目的有两重. 第一，这方程组可作为研究一切静电问题的基础(见第2章). 第二，它也是进一步探索电磁学一般规律的出发点之一.

从上面导出方程的过程中，有两点值得注意. 一点是，(1.1.12)式的导出密切地依赖于库仑定律中电场强度与距离平方成反比的结论. 如果 $\boldsymbol{E}$ 与距离的 $2+\varepsilon$ 次方成反比，ε 虽很小却不等于0，则(1.1.12)式就完全不成立了. 由此可见，用实验测定静电场强度对反平方律是否有偏离是一个关键. 1785年，库仑本人的结果是 $\varepsilon<4\times10^{-2}$. 后人意识到需要有更高精度的检验. 1873年，麦克斯韦得到了 $\varepsilon<4.9\times10^{-5}$ 的结果. 进入20世纪后，检验仍在继续，但动机有了转移. 光速的不变性作为相对论的基础，它要求光子的静质量为零. 而这同样意味着静电场须严格遵守反平方律. 简而言之，实验精度又已提高了十几个量级，人们至今没有发现与反平方律的偏离.

另一值得注意之点是关于电场无旋性的证明. 从(1.1.15)式的推导中看到的是相反的情况. 这推导仅利用了点电荷的电场在 $\boldsymbol{r}$ 的方向上，以及其大小仅为距离的函数. 它甚至与函数的具体形式没有关系. 因此，静电场的无旋性在很大程度上是空间各向同性的反映，而它不依赖于库仑定律的细节. 顺便指出，其实点电荷的电场在 $\boldsymbol{r}$ 方向上也是库仑定律作为经验规律的一部分. 在讨论磁场时我们会看到，只凭空间的各向同性并不保证场强须在 $\boldsymbol{r}$ 的方向上.

1.2 静磁场的方程式

寻找静磁场的基本规律比寻找电场规律要复杂．对于静电问题，能产生电场和感受电场存在的只有电荷．磁现象却有双重性．人们最初是通过磁铁而认识磁现象的．磁铁的磁性曾被认为来自正负磁荷组成的磁偶极子．到 19 世纪初，人们发现电流也能产生磁场，且也能感受到外磁场的作用力．这样，磁荷和运动的电荷成了磁现象的双重本原．今天，物体的微观结构已被弄清．人们已确切知道，作为宏观物体组元的分子或原子并不具有磁荷，铁磁体的磁性是来自其电子自旋所产生的磁矩．在第 3 章中讨论静磁问题时将说明，微观粒子的磁矩可等效地用电流圈来描述，因此磁铁的磁性也可还原成电流的效果．这观点常被称为安培的分子电流假说．按这假说，宏观电动力学中只把电流当作静磁场的唯一本原．下面将按这样的观点来寻找静磁场的基本方程．

在研究规律之前，我们先讨论一下对电流的描述．在电工学中，假定电流是沿导线流动的．电流强度 I 指单位时间内流过任一导线截面的电量[1]．但是电流并不必须在导线内流动．因此作为一般情形，我们需要在三维介质中引入体电流密度．

设介质中正负电荷的体密度分别为 ρ_+ 和 ρ_-，则总电荷密度为

$$\rho = \rho_+ + \rho_-. \tag{1.2.1}$$

若 $\rho_+ = -\rho_-$，该处才是电中性的．一般情形下，正负电荷并不等量（反号），它们的运动速度也不相同，这样才有了电流．设它们的宏观速度分别为 $\boldsymbol{v}_+$ 和 $\boldsymbol{v}_-$，则体电流密度 $\boldsymbol{j}$ 定义为

$$\boldsymbol{j} = \rho_+ \boldsymbol{v}_+ + \rho_- \boldsymbol{v}_-. \tag{1.2.2}$$

从这定义式看出，如果介质是电中性的，正负电荷又以相等的速度

[1] 在 1996 年全国自然科学名词审定委员会公布的物理学名词中，将电流强度改为电流[强度]，方括号中的字可省略．本书仍沿用电流强度是为了不致引起歧义．

运动，则电流密度就是零. 重要情形之一是介质中正电荷没有宏观运动，那么电流密度仅来自负电荷的运动. 这时有 $\boldsymbol{j}=\rho_{-}\boldsymbol{v}_{-}$. 导线中的电流[强度] I 与电流密度 $\boldsymbol{j}$ 的关系为

$$I=\iint \boldsymbol{j}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}, \tag{1.2.3}$$

式中 $\boldsymbol{j}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 的意义是单位时间内流过元面 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 的电量. 因此对导线截面积分后，就是导线上的电流[强度].

在介质中任取一闭面，某时间间隔内流入闭面的电量应等于闭面内电量的增加. 这被称为电荷的守恒性. 用数学表述，即

$$\iiint \frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}\tau=-\oint\!\!\!\oint \boldsymbol{j}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=-\iiint \nabla\cdot \boldsymbol{j}\,\mathrm{d}\tau, \tag{1.2.4}$$

其中后一步是数学结果. 因闭面是任意选取的，所以它也可用微分形式

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0 \tag{1.2.5}$$

来表示. (1.2.4)或(1.2.5)式被称为电荷的连续性方程，或叫电荷守恒方程.

一般说来，介质中的电荷密度及电流密度不仅与空间位置有关，它们也会随时间而变化. 若 ρ 与 $\boldsymbol{j}$ 均不随时间而变，这就是稳定电流情形. 由(1.2.5)式看出，稳定电流条件为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0. \tag{1.2.6}$$

静磁场正是由稳定电流产生的. 因此让我们注意，本节下面涉及的电流密度必须满足这个关系.

现在开始讨论静磁问题. 我们已熟知，稳定电流周围必伴随有静磁场，同时磁场会对电流有作用力. 下面把与静磁场有关的规律表述成如下三点：

(1) $\boldsymbol{r}'$ 处的电流元 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'$ 在 $\boldsymbol{r}$ 处产生的磁场 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ 为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\times \boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\mathrm{d}\tau', \tag{1.2.7}$$

即磁感应强度 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 的大小与电流密度成正比，而与距离平方成反

比．在国际单位制中，比例系数写成 $\mu_0/4\pi$，它的值是

$$\frac{\mu_0}{4\pi} = 1.000 \times 10^{-7}\ \text{I.U.}. \tag{1.2.8}$$

值得注意，$\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 的方向和电流密度矢量 $\boldsymbol{j}$ 与距离矢量 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$ 所构成的平面相垂直．

（2）磁场对电流的依赖关系也满足叠加原理．与静电情形不同，由于单个电流元不能稳定地存在，所以实际的静磁场必是许多电流元的总效果．叠加原理告诉我们，总磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 是(1.2.7)式对一切电流元的积分，即

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') \times \boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\,\mathrm{d}\tau'. \tag{1.2.9}$$

（3）磁场对电流的力密度（即施加在单位体积内载流体上的力）为

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}. \tag{1.2.10}$$

这些就是人们对经验事实作理论分析后所得的主要结果．(1.2.7)或(1.2.9)式常被称为毕奥-萨伐尔定律．(1.2.10)式则被叫做洛伦兹力公式．

这里我们对磁场的经验规律作一点说明．磁感应强度的大小与电流元的强度成正比．与电场一样，这是叠加原理的反映．此外，磁感应强度也与距离平方成反比．这也与电场的规律相类似．值得注意的是磁场的方向．为清楚起见，让我们把电流元扩展成无限长直线电流．空间的各向同性保证了这磁场是轴对称的，但却并不意味场的方向是辐射状的．事实正好相反．经验规律告诉我们，磁场的方向是呈涡旋状的（图 1.4）．上节中曾指出，空间各向同性并不保证点电荷的电场在 $\boldsymbol{r}$ 方向上，其含义正在这里①．

---

① 从数学上讲，矢量有两类，即极矢量和轴矢量．前者的方向与采用右手系或左手系无关，后者的方向则与此有关．磁感应强度是一种轴矢量．若改用左手系，它的方向与习惯指认的方向相反．电场强度是极矢量．电场强度与磁感应强度的这种差别归根到底是经验的，而不是空间各向同性的推论．

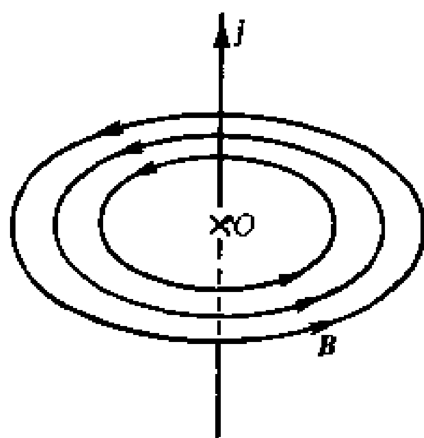


图 1.4 直电流的磁感应线

由于同样的理由，我们需要把静磁场的规律表示成微分方程的形式．虽然磁场与电场的经验规律有类似之处，下面将看到，它们的微分方程却很不一样．由于电流元不能稳定存在，我们将以(1.2.9)式为出发点，来计算稳定电流的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的散度和旋度．对此我们分两步做．先对 $\boldsymbol{B}$ 的表达式作一些处理，然后再来计算它的散度和旋度．这类矢量分析运算中的常用公式已列入附录 1 中．

利用附录中公式(A1.10)，磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的经验规律(1.2.9)可重写为

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=-\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\times\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,\mathrm{d}\tau'. \tag{1.2.11}$$

再利用公式(A1.3)，把这式子化成

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \nabla\times\left(\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)\mathrm{d}\tau'. \tag{1.2.12}$$

化这一步时用到了 $\nabla\times\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')=0$，因为这里的 $\boldsymbol{j}$ 是源变量 $\boldsymbol{r}'$ 的函数，而 ∇ 是对场变量 $\boldsymbol{r}$ 的微商．从(1.2.12)看出，磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 有形式

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}, \tag{1.2.13}$$

其中的 $\boldsymbol{A}$ 被定义为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,\mathrm{d}\tau'. \tag{1.2.14}$$

由(1.2.13)式,我们立即得到

$$\nabla\cdot \boldsymbol{B} = 0. \tag{1.2.15}$$

它是磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 满足的一个微分方程. 与静电场不同,磁感应场总是无散的. 接着需要计算 $\boldsymbol{B}$ 的旋度. 利用公式(A1.5),有

$$\nabla\times \boldsymbol{B} = \nabla(\nabla\cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A}. \tag{1.2.16}$$

先由稳定电流条件证明,上式右边第一项为零. 利用(A1.2),$\boldsymbol{A}$ 的散度可化成

$$\begin{aligned}\nabla\cdot \boldsymbol{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)\mathrm{d}\tau' \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \nabla'\cdot\left(\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)\mathrm{d}\tau',\end{aligned} \tag{1.2.17}$$

其中 ∇' 是对源变量的微分算符. 这样化时用到了 $\nabla\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')=0$ 及 $\nabla'\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')=0$,后一等式是稳定电流条件. 此外还用到了

$$\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = -\nabla'\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}. \tag{1.2.18}$$

这里的积分是对全部有电流的区域作的. 按高斯定理,上式右边可化为区域边界上的面积分. 因没有电流流出或流入这区域,所以得到 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$. 这样,$\boldsymbol{B}$ 的旋度写成

$$\nabla\times\boldsymbol{B} = -\nabla^2\boldsymbol{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\,\nabla^2\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\,\mathrm{d}\tau'. \tag{1.2.19}$$

再利用(A1.11),即

$$\nabla^2\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'), \tag{1.2.20}$$

我们得到

$$\nabla\times\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{j}. \tag{1.2.21}$$

这是磁感应强度所满足的另一个微分方程. 它表明,电流密度作为磁场的源,它与磁感应强度的旋度成正比. 在国际单位制中,比例系数为 μ_0,被称为真空磁导率.

通过这些推导,我们从毕奥-萨伐尔定律得到了两个偏微分方

程，即(1.2.15)和(1.2.21). 它们构成了一组完备的线性偏微分方程组. 这方程组既是第3章中讨论静磁问题的依据，也是下面寻求电磁学一般规律的出发点之一.

1.3 电磁感应定律

上面讨论的是静电和静磁问题. 这种情况下，电场和磁场都不随时间而变，电现象与磁现象没有联系. 电与磁相联系的定量规律是在1831年由法拉第得到的. 这是由变化磁场产生电场的规律，它被称为电磁感应定律.

电磁感应定律的数学形式可表示成

$$\mathscr{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{1.3.1}$$

其中的 $\mathscr{E}$ 是任意闭路的感应电动势，它被定义为

$$\mathscr{E} = \oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1.3.2}$$

Φ 是以此闭路为界的曲面上的磁感应通量，即

$$\Phi = \iint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}. \tag{1.3.3}$$

(1.3.1)式中写上了一个负号，因此需说明正负号是怎么定义的. 首先任意地规定(1.3.2)式中的闭路的正向. (1.3.3)式中元面 $\mathrm{d}\sigma$ 的正向按右手定则被闭路的正向决定(图1.5). 这样，闭路内磁感应通量的正负既取决于实际磁场的情况，也取决于正向的定

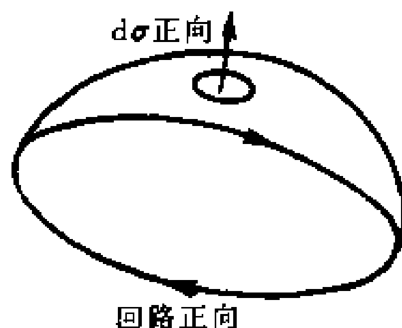


图 1.5　元面正向与回路正向

义. 经验表明,不管正向如何定义,当通量增加时,所感应的电动势必与规定的闭路正向相反. 这就是(1.3.1)式中的负号的来由. 注意这负号虽然与闭路正向的规定无关,但却与我们采用右手定则有关.

电磁感应定律的物理内涵是我们早已熟悉的. 现在需要的是把它表达成一个微分方程. 把 $\mathscr{E}$ 和 Φ 的定义代入(1.3.1)式,得到的是电磁感应定律的积分形式,

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = - \iint \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}. \tag{1.3.4}$$

用斯托克斯定理,把此式左边化成 $\nabla\times\boldsymbol{E}$ 的面积分. 再注意到闭路和相应面是任意选取的,我们就能由此得出电磁感应定律的微分形式. 它是

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}. \tag{1.3.5}$$

从探究电磁学一般规律的角度讲,电磁感应定律有两方面重要的意义:

(1) 它首先指明了电与磁是有联系的现象. 在学习相对论时我们将看到,电与磁不仅有联系,它本质上是同一个场的不同分量.

(2) 静电场的无旋性是特殊情形. 一般情况下,电场是有旋的.

1.4 麦克斯韦方程

在 19 世纪中叶,当麦克斯韦想从理论上探索电磁场变化的一般规律时,前人已留下的在一定条件下适用的电磁场方程有四个. 它们是

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon_0, \qquad (1.1.12)$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \qquad (1.1.15)\text{ 及 }(1.3.5)$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0, \qquad (1.2.15)$$

$$\nabla\times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j}. \tag{1.2.21}$$

我们从前面的讨论中已经知道，第一个方程适用于静电情形，第二个方程适用于静止和感应电场，第三和第四个方程则适用于静磁场. 这些方程中所涉及的电荷密度 ρ 和电流密度 $\boldsymbol{j}$ 应满足电荷守恒方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot \boldsymbol{j} = 0. \tag{1.2.5}$$

从理论上讲，一般地成立的电磁方程组的内部，及它们与电荷守恒方程之间应当兼容，即彼此没有矛盾. 上述五个方程还不具备这条件. 麦克斯韦的第一步探索是改造这组方程，先使它们内部没有矛盾.

对第二个方程两边求散度，利用 $\nabla\cdot(\nabla\times \boldsymbol{E})=0$，推知

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot \boldsymbol{B}) = 0. \tag{1.4.1}$$

它与第三个方程是相洽的. 若对第四个方程两边求散度，则因 $\nabla\cdot(\nabla\times \boldsymbol{B})=0$ 推出 $\nabla\cdot \boldsymbol{j}=0$. 在一般情形下，电荷密度会随时间有变化，$\nabla\cdot \boldsymbol{j}$ 应等于 $-\frac{\partial \rho}{\partial t}$. 这说明第四个方程只适用静止场. 当电荷密度有变化，这方程必不成立. 麦克斯韦正是从这点入手引入了位移电流.

为与电荷守恒方程相兼容，设想第四个方程应修改为

$$\nabla\times \boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}_d), \tag{1.4.2}$$

其中的 $\boldsymbol{j}_d$ 就是设想中的位移电流. 问题在于它应当如何定义. 对(1.4.2)式求散度后看到，为与电荷守恒不矛盾，并假定(1.1.12)式在 ρ 有变化时依然成立，应当有

$$\nabla\cdot \boldsymbol{j}_d = -\nabla\cdot \boldsymbol{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = \varepsilon_0 \nabla\cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right). \tag{1.4.3}$$

因此，麦克斯韦把位移电流定义作

$$\boldsymbol{j}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \tag{1.4.4}$$

在这样修改后，可以写出一个方程组

$$\nabla\cdot \boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon_0, \tag{1.4.5}$$

$$\nabla\times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{1.4.6}$$

$$\nabla\cdot \boldsymbol{B} = 0, \tag{1.4.7}$$

$$\nabla\times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}. \tag{1.4.8}$$

至少在它们内部，及它们与电荷守恒之间，已没有矛盾了. 这就是今天已被人们广泛接受的麦克斯韦方程组.

值得强调，方程组的无矛盾性只是正确性的必要条件，而它并不能保证这方程是正确的. 今天人们把麦克斯韦方程作为电磁学的一般规律来接受，不是因为它有无矛盾性的论证，而是因为它的推论已为后来的大量实践所证实. 从历史讲，麦克斯韦方程预言了电磁辐射的存在，赫兹用实验证实了它. 这是使人们接受这方程组的决定性因素. 本课程中要讨论的正是麦克斯韦方程在各种电磁问题上的推断. 因此我们不在这里分析它的正确性的证据，而先只对这方程的理论内涵作一些说明.

位移电流的引入无疑是建立麦克斯韦方程的关键. 从其定义式看，位移电流本质上并不是电荷的流动，而是电场的变化. 它说明，与磁场的变化会感应产生电场一样，电场的变化也必会感应产生磁场. 这一点在当时并没有实验根据，因此它是麦克斯韦电磁理论的一个重要预言. 在研究电磁波时将看到，正是由于电场与磁场的相互感应，才使得变化的电磁场一定以波的形式传播. 所以说，电磁波的存在是位移电流的关键性推断. 它也是麦克斯韦方程作为一般电磁规律的重要特征.

从形式上看，麦克斯韦对电磁场方程的修改只是引入了位移电流，而其他三个方程都原样地保留了. 考虑到修改后的方程将不再是特殊情形下的方程，而将被当作一般的电磁规律，这实际上给没有改动过的方程也赋予了新的含义.

先看方程(1.4.5)和(1.4.6). 现在把它们作为一般规律的一部分,它们包含了若干原来不具有的内涵. 首先,它表明电场分布只取决于电荷的分布和磁场的变化,电场不再有别的产生方式. 其次,在电荷密度有变化的情况下,电场强度的散度仍与当时当地的电荷密度成正比,而感应电场则是无散的. 这些都是新的结论. 再看磁场的规律. 麦克斯韦方程表明:(1) 磁场也只有两种产生方式,即由电流产生和由变化电场感应产生;(2) 这两种方式产生的磁场都是涡旋场;(3) 磁场的无散性与电流是否稳定无关. 这些结论也都并不是来自过去的经验. 因而,从一方面讲,这些结果的正确性是需要新的实践来证实的. 从另一方面讲,这些新结果也加深了人们对电磁场的认识.

除了电磁场方程和电流守恒方程外,电磁场对电荷和电流的作用力公式也是基本电磁规律的一部分. 假定经验的电力和磁力公式都是一般地成立的,我们有

$$\boldsymbol{f} = \rho \boldsymbol{E} + \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}. \tag{1.4.9}$$

它被称为洛伦兹力公式. 注意,(1.4.9)式中的 $\boldsymbol{f}$ 是载荷体所受的力密度,即单位体积内的载荷体所受的电磁力. 对于电量为 e 的点电荷,若其速度为 $\boldsymbol{v}$,则洛伦兹力公式相应地写作

$$\boldsymbol{F} = e\boldsymbol{E} + e\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}, \tag{1.4.10}$$

这里的 $\boldsymbol{F}$ 是点电荷所受的电磁力. 麦克斯韦方程和洛伦兹力公式

封闭区域 V. 在这区域内，由于电磁力做功，载荷体的机械能将会增加(或减少). 如果能量保持守恒，那么就必须由电磁场能量的减少(或增加)来补偿. 问题在于怎样来定义电磁场的能量，以及是否有可能引入电磁场的能量来使得总能量保持守恒.

让我们把电磁力的功率密度记作 W，则 $\iiint W\mathrm{d}\tau$ 是 V 内载荷体的能量的增加率. 设电磁场具有能量，其能量密度为 w，则 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint w\mathrm{d}\tau$ 是 V 内电磁场的能量增加率. 变化电磁场的能量可能在流动. 我们引入能流密度 $\boldsymbol{S}$ 来描写它，则单位时间从 V 的表面流出的电磁能是 $\oiint \boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$. 从一般考虑，若能量守恒在电磁作用下仍然成立，它应有形式

$$\iiint W\mathrm{d}\tau = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint w\mathrm{d}\tau - \oiint \boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}. \tag{1.5.1}$$

利用高斯定理，把右边第二项化成 V 上的体积分，则上式可改写成微分形式，即

$$W = -\frac{\partial w}{\partial t} - \nabla\cdot\boldsymbol{S}. \tag{1.5.2}$$

它应当是电磁作用下的能量守恒的数学形式，式中的 w 和 $\boldsymbol{S}$ 作为电磁场的能量和能流密度，它们应当只是 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的函数，而与 ρ 和 $\boldsymbol{j}$ 无关. 现在我们需要回答，能否以麦克斯韦方程和洛伦兹力公式为出发点，来导出(1.5.2)式那样的关系. 下面即将看到，回答是肯定的.

首先从洛伦兹力公式来导出电磁力的功率密度 W. 为一般起见，把正负电荷分开表示. 考虑到磁力不做功，得到功率密度 W 的表达式为

$$W = \boldsymbol{f}_+\cdot\boldsymbol{v}_+ + \boldsymbol{f}_-\cdot\boldsymbol{v}_- = \rho_+\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}_+ + \rho_-\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}_- = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}. \tag{1.5.3}$$

为试图得到(1.5.2)，我们把等式右边只用场量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 来表示. 利用(1.4.8)式，电流密度 $\boldsymbol{j}$ 可写成

$$j = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \boldsymbol{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}. \qquad (1.5.4)$$

代入(1.5.3)式得到

$$W = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E} \cdot \nabla \times \boldsymbol{B} - \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}. \qquad (1.5.5)$$

参照(1.5.2)的形式，先把右边第一项化成全散度. 按(A1.4)，再利用方程(1.4.6)，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} \cdot \nabla \times \boldsymbol{B} &= - \nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B} \cdot \nabla \times \boldsymbol{E} \\ &= - \nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}. \end{aligned} \qquad (1.5.6)$$

代回(1.5.5)式，再把含时间微商的项稍作整理，功率密度 W 化成了

$$W = - \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right). \qquad (1.5.7)$$

它正是能量守恒所要求的形式.

在证明了能量守恒继续成立的同时，我们看到，电磁场的能量密度应是

$$w = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right), \qquad (1.5.8)$$

而电磁场的能流密度则须相应地定义为

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}. \qquad (1.5.9)$$

这样我们就完成了对电磁作用下的能量守恒的讨论. 上面的讨论告诉我们，只要麦克斯韦方程和洛伦兹力公式是正确的，那么能量守恒的成立是它的必然后果，并且场的能量和能流密度的表达式也是完全被它们决定了的.

电磁场本身具有能量，而且它的能量与载荷体的能量之间能够相互转换，且保持守恒，这无疑是一个重要的物理概念. 它有力地说明了电磁场不是电磁作用的一种数学描述手段，而是与载荷

体同样实在的物理客体. 相对于法拉第的观念,它标志了电磁学的一个重要进步.

在静电学的范围内,我们都已知道,电力是保守力,因而可以相应地引入电力势能. 按上面的一般讨论,静电力作用下的能量守恒应当是运动电荷的动能与静电场能间的转换. 这样看来,载荷体在静电场中的势能应是电场场能的一种等效描述. 我们将在下一章中讨论静电学问题时论证这一点. 此外我们知道,变化电场的电力不是保守力,因而静电势能的概念不适用. 本节的讨论告诉我们,把电磁场能考虑在内,能量守恒却依然是成立的. 载荷体能量的减少,一定是由于电磁波带走了能量. 反之,则一定是载荷体吸收了电磁波的能量. 在第4,5两章中讨论电磁波的传播和辐射时,我们将具体地看清这一点. 这里只想强调,电磁场本身是具有能量的,电磁作用下总能量一定是守恒的.

1.6 电磁作用下的动量守恒定理

现在我们按上节同样的思路来讨论电磁作用下的动量守恒问题. 按经典力学,电磁力会改变载荷体的动量. 如果动量在电磁作用下有守恒性,那么电磁场本身必须具有动量,且它能相应地改变自己的动量,以使整个体系的动量保持守恒.

我们用 g 描述电磁场的动量密度,则 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint g\mathrm{d}\tau$ 是任意体积 V 内电磁动量的增加. 电磁场在变化时,它的动量也会流动. 因动量密度是矢量,动量流须用二阶张量描述,记作 $\overleftrightarrow{T}$. 其中 T_{ij}代表 i 方向的动量沿 j 方向的流动,所以它共有九个分量. 确切地说,对任意元面 $\mathrm{d}\sigma$, $\overleftrightarrow{T}\cdot\mathrm{d}\sigma$ 描述单位时间内流过此面的电磁动量. 因此 $\oiint\overleftrightarrow{T}\cdot\mathrm{d}\sigma$ 是单位时间内流出 V 的电磁动量. 设想 V 内的总动量在电磁作用下有守恒性,那么它的数学形式只能是

$$\iiint \boldsymbol{f} \mathrm{d}\tau = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint \boldsymbol{g} \mathrm{d}\tau - \oiint \overleftrightarrow{T} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}, \tag{1.6.1}$$

其中 $\boldsymbol{f}$ 是洛伦兹力密度，等式左边代表 V 内载荷体的动量的增加率. 上式右边第二项可用高斯定理化成 V 内的体积分. 这样可得出动量守恒的微分形式为

$$\boldsymbol{f} = -\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial t} - \nabla \cdot \overleftrightarrow{T}. \tag{1.6.2}$$

与讨论能量守恒时一样，现在的问题是能否从麦克斯韦方程及洛伦兹力公式出发，来导出这样的关系式. 下面将看到，它的回答也是肯定的.

由洛伦兹公式知

$$\boldsymbol{f} = \rho \boldsymbol{E} + \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}, \tag{1.4.9}$$

考虑到 $\boldsymbol{g}$ 和 $\overleftrightarrow{T}$ 都应只依赖于是电磁场量，我们需要把此式右边用场量 $\boldsymbol{E}$ 及 $\boldsymbol{B}$ 来表示. 由场方程(1.4.5)及(1.4.8)知

$$\rho = \varepsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{E}, \tag{1.6.3}$$

$$\boldsymbol{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \boldsymbol{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}. \tag{1.6.4}$$

代入(1.4.9)得到

$$\boldsymbol{f} = \frac{1}{\mu_0}(\nabla \cdot \boldsymbol{E})\boldsymbol{E} + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \times \boldsymbol{B}. \tag{1.6.5}$$

然后我们须尝试把它化成动量守恒所要的形式.

利用两个尚未用到的场方程(1.4.6)及(1.4.7)，可写出关系式

$$0 = \frac{1}{\mu_0}(\nabla \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{B} + \varepsilon_0(\nabla \times \boldsymbol{E}) \times \boldsymbol{E} + \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \times \boldsymbol{E}. \tag{1.6.6}$$

把(1.6.5)和(1.6.6)的两边分别相加，得到一个对 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 很对称的形式. 等式右边共有六项，其中有两项与对 t 的微商有关. 合起来成为

$$-\varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \times \boldsymbol{B} + \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \times \boldsymbol{E} = -\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}), \tag{1.6.7}$$

它正是动量守恒所要的形式．不涉及对 t 微商的四项中，两项只与 $\boldsymbol{E}$ 有关，它是 $\varepsilon_0[(\nabla \cdot \boldsymbol{E})\boldsymbol{E} + (\nabla \times \boldsymbol{E}) \times \boldsymbol{E}]$．另两项只与 $\boldsymbol{B}$ 有关，它有相同的矢量结构．下面我们来分别处理．利用矢量运算公式（参看附录 1）

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}) = (\boldsymbol{E} \cdot \nabla)\boldsymbol{E} + (\nabla \cdot \boldsymbol{E})\boldsymbol{E}, \tag{A1.25}$$

$$(\nabla \times \boldsymbol{E}) \times \boldsymbol{E} = (\boldsymbol{E} \cdot \nabla)\boldsymbol{E} - \frac{1}{2} \nabla E^2, \tag{A1.6}$$

推出

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{E})\boldsymbol{E} + (\nabla \times \boldsymbol{E}) \times \boldsymbol{E} = \nabla \cdot (\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}) - \frac{1}{2} \nabla E^2. \tag{1.6.8}$$

引入二阶单位张量 $\overleftrightarrow{I}$（参看附录 1），上式右边第二项也能化成全散度，即

$$\nabla \cdot (E^2 \overleftrightarrow{I}) = \nabla E^2. \tag{1.6.9}$$

这样，与 $\boldsymbol{E}$ 有关的两项也化成了动量守恒要求的形式，

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{E})\boldsymbol{E} + (\nabla \times \boldsymbol{E}) \times \boldsymbol{E} = \nabla \cdot \left(\boldsymbol{E}\boldsymbol{E} - \frac{1}{2}E^2 \overleftrightarrow{I}\right). \tag{1.6.10}$$

另外与 $\boldsymbol{B}$ 有关的两项可同样写成

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{B} + (\nabla \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B} = \nabla \cdot \left(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B} - \frac{1}{2}B^2 \overleftrightarrow{I}\right). \tag{1.6.11}$$

结合(1.6.7)、(1.6.10)和(1.6.11)，我们最终得到

$$\boldsymbol{f} = -\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}) - \nabla \cdot \left[\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right)\overleftrightarrow{I} - \varepsilon_0 \boldsymbol{E}\boldsymbol{E} - \frac{\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}}{\mu_0}\right], \tag{1.6.12}$$

它表明在电磁作用下，动量守恒也是依然成立的．

把(1.6.12)与(1.6.2)相比较，看出电磁场的动量密度 $\boldsymbol{g}$ 应定

义为

$$\boldsymbol{g} = \epsilon_0 \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}. \tag{1.6.13}$$

而其动量流密度 $\overleftrightarrow{T}$ 则应定义为

$$\overleftrightarrow{T} = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right)\overleftrightarrow{I} - \epsilon_0 \boldsymbol{E}\boldsymbol{E} - \frac{\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}}{\mu_0}. \tag{1.6.14}$$

与上节讨论能量守恒一样，我们在证明系统总动量守恒的同时，得出了电磁场的动量密度和动量流密度的表达式. 这些是本节的主要结论.

值得指出，电磁场的动量密度与能流密度对场量有相同的依赖关系. 在讨论电磁波时将看到，真空介电常数 ϵ_0 与真空磁导率 μ_0 的乘积等于真空中的光速 c 平方的倒数，即 $\epsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$. 于是 $\boldsymbol{g}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 的关系是

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{S}/c^2. \tag{1.6.15}$$

这是电磁场的能流密度和动量密度间的一个重要性质.

电磁场具有动量和动量流也是麦克斯韦方程和洛伦兹力公式的推论，因此这一结果的正确性不需要独立的检验. 让我们讨论一下它的物理后果. 由于电磁波具有动量，当电磁波照射到物体的表面上时，这表面会感受到电磁波的压力. 考虑平行波束的垂直入射，若物体能全部吸收它，则它受到的压强 p 是单位时间、单位面积吸收的电磁波的动量，即

$$p = cg. \tag{1.6.16}$$

若物体对电磁波的反射系数为 b，则它受到的压强是

$$p = (1 + b)cg. \tag{1.6.17}$$

$b=1$ 是全反射，物体表面的压强是 $2cg$. 在通常情况下，这压强很微弱. 麦克斯韦曾算过，晴天太阳光在黑体表面上的压强仅为 0.4 mg/m^2. 上世纪末，列别捷夫曾用一个类似扭秤的装置，测量过两种不同吸收率的表面的压强差，测量结果证实了理论的预言，这应是意料之中的事. 光的压强并不永远是微弱的，现今实验室

能产生的强激光会有相当显著的压强. 在恒星内部,由于温度很高,辐射场的压强与气体的压强可比拟,或前者超过后者的情况都是存在的.

最后,我们顺便在这里讨论一下动量守恒与牛顿第三定律的关系. 考虑两个(或多个)带电粒子在相互作用下运动的系统. 按本节的结果,这粒子系统的总动量与它们的电磁场的动量之和应在运动中保持守恒. 仅当电磁场的动量变化可以忽略,才会有粒子组的总动量的守恒. 从力学讲,质点组的动量守恒与牛顿第三定律是等价的. 由此看来,牛顿第三定律并不是普遍成立的规律,而只是在一定条件成立的近似规律. 值得强调,力学问题中涉及的绝大部分力,如弹性力、摩擦力和碰撞力等,在本质上都是电磁作用的宏观表现. 对宏观电中性的物体,两者必须相接触才会有相互作用力. 在这种作用下,电磁场的变化是微不足道的. 若能不计及这变化,才有牛顿第三定律的成立. 因此,在电磁性的作用力下,本节所讲的总动量守恒才是基本规律.

1.7 介质的电磁性质

前面讨论电磁场方程时没有考虑介质(例如空气或水)的同时存在,因而常被称为真空中的场方程. 现在我们讨论介质对电磁场的影响. 这种影响有相互的两个方面. 一方面电磁场会使介质发生极化和磁化. 另一方面,极化和磁化了的介质又会产生附加的电磁场. 我们需要知道的是在这两方面影响趋于稳定时介质中的电磁场的规律. 在本节中将先对介质在电磁场中极化和磁化的问题作一个初步的讨论.

介质是由大量分子(或原子)组成的宏观物体. 我们知道,虽然分子的总电量为零,但它的内部是一个复杂的带电系统. 在有的分子内,其负电荷的中心位置与正电荷的中心位置相重合. 这种分子的偶极矩也为零,被称为无极性分子,例如氢分子和二氧化

碳分子(图 1.6(a))等. 有的分子的正负电中心位置不重合,则它本身具有不为零的偶极矩. 这类分子被称为极性分子,例如水分子(图 1.6(b))等. 对于由极性分子组成的介质,当介质中没有外电场时,由于分子的无序取向,任一宏观小体元内的分子总偶极矩也是零,因而它仍可被当作宏观地电中性的. 介质的极化指有外电场存在时,一个宏观小的体元内将有偶极矩出现.

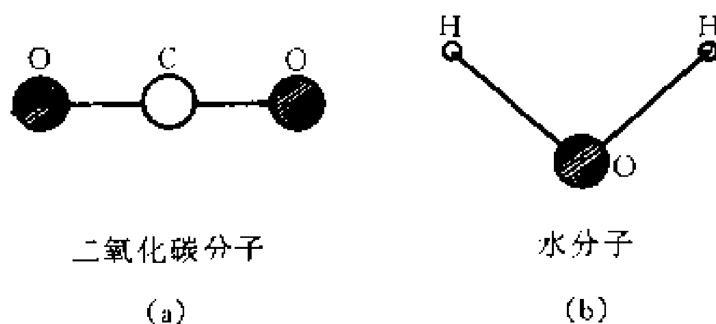


图 1.6 无极性分子与极性分子

对于无极性分子组成的介质,外电场会使分子的正负电中心向相反方向移动. 这样,原来无极性分子中就产生了偶极矩,且各分子的偶极矩有相同的方向. 于是介质中就有了宏观的偶极矩. 对于极性分子组成的介质,外电场会改变分子原有的偶极矩,但这效应常是次要的. 外电场的主要影响是它使各分子偶极矩的取向向电场方向靠拢(图 1.7),从而在介质中产生非零的宏观偶极矩. 这就是电场使介质产生极化的定性机制.

单位体积内的分子总偶极矩被称为介质的极化强度 $\boldsymbol{P}$,这是一个描述介质极化程度的宏观量. 极化强度不仅与电场强度有关,它还与介质的组分、密度和温度等性质有关. 因此一般说来,在极化介质中,极化强度是位置和时间的函数.

下面讨论介质的磁化机制. 原子或分子的磁性来自它的磁矩. 这磁矩则来自其组分粒子的轨道运动和自旋. 在没有外磁场时,分子的磁矩作为其内部各部分磁矩的矢量和,因此有的分子的磁矩为零,有的则不为零. 即使分子本身的磁矩不为零,同样由于磁矩取向的无序性,介质中的宏观磁矩依然为零. 在宏观电动力

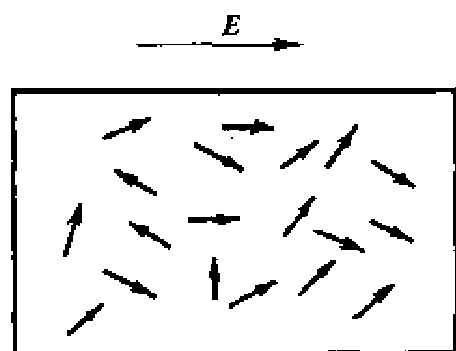


图 1.7 极性分子中介质中的小体元

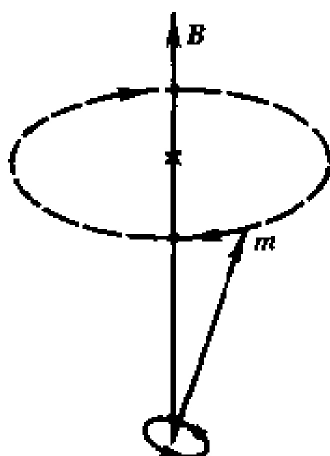


图 1.8 磁偶极子在外场中的进动

学中讨论磁化时,我们等效地把磁矩看成是由一个小电流圈产生的. 在外磁场的作用下,小电流圈会沿磁场方向产生进动(即拉莫尔进动). 它给分子带来了与磁场方向反向的附加磁矩,图 1.8 中示意地画出了这效应. 若分子原来的磁矩为零,磁化后的介质中会产生出与外磁场方向相反的磁矩. 这样的介质被称为逆磁介质. 若未磁化时的分子磁矩不为零,外磁场的逆磁效应也会发生,但它是次要的. 主要是磁场会使各分子的磁矩取向向磁场方向靠拢,从而产生与外磁场方向一致的宏观磁矩. 这样的介质是顺磁介质. 这就是一般介质磁化的定性机制. 铁磁质的磁化不在这里讨论.

介质被磁化时,我们用单位体积内的总磁矩作为描述磁化程度的宏观量,它被称做磁化强度,记作 $\boldsymbol{M}$. 磁化强度不仅与外磁场的磁感应强度有关,也与介质本身的性质有关. 因此在一般情况下,$\boldsymbol{M}$ 也是 $\boldsymbol{r}$ 和 t 的函数.

现在进一步考虑极化强度 $\boldsymbol{P}$ 与电场强度 $\boldsymbol{E}$,以及磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 与磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的定量关系. 上面已提到,这种关系取决于介质的组分和它的热力学状态,所以难以得出普遍适用的规律. 经验表明,在一般介质中,它们之间满足简单的线性关系,即

$$P = \chi_e \varepsilon_0 E, \tag{1.7.1}$$

$$M = \frac{\lambda_m}{\mu_0} B. \tag{1.7.2}$$

在国际单位制中 P 与 $\varepsilon_0 E$ 有相同的量纲. 这里无量纲[①]的比例系数 χ_e 叫做介质的极化率. 类似地, M 与 B/μ_0 同量纲, 所以 λ_m 是无量纲的比例系数[②]. χ_e 和 λ_m 的值都可由实测定出. 注意这里的 E 和 B 是介质中受极化和磁化影响后的场强.

满足经验关系(1.7.1)和(1.7.2)的介质叫线性介质. 本书中将主要讨论线性介质中的电动力学问题. 为此, 下面对这种关系的应用条件作几点说明.

(1) 前面已指出, 极化率和磁化率与介质的密度及温度有关. 我们将着重讨论均匀介质. 这里的均匀不仅指化学组分的均匀, 而且介质的密度和温度也须均匀. 这样极化率和磁化率才是常数. 当空间不同区域有不同的均匀介质存在时, 极化率和磁化率在相应的区域内是常数.

(2) 这种关系式的成立, 要求介质为各向同性. 对各向异性的介质如单晶体, 它自身有特殊的空间取向. 因此强度相同而方向不同的电磁场会产生不同的极化和磁化. 这情况下, 线性关系须写作

$$P = \varepsilon_0 \overleftrightarrow{\chi_e} \cdot E, \tag{1.7.3}$$

$$M = \frac{1}{\mu_0} \overleftrightarrow{\lambda_m} \cdot B, \tag{1.7.4}$$

即极化率和磁化率都用二阶张量描述.

(3) 对于变化的电磁场, 极化率和磁化率还会与场的变化频

---

① 按 1993 年发布的国家标准, 应为量纲一. 本书仍沿用习惯用法.

② 历史上用 H 描述磁场强度, 线性介质的磁化关系被写成 $M=\chi_m H$. 人们已把 χ_m 称为介质的磁化率, 因此我们不对这里的 λ_m 命名. 由 H 的定义式(1.8.16)看出, λ_m 与 χ_m 的关系为 $\lambda_m=\frac{\chi_m}{1+\chi_m}$. 对一般的顺磁质或逆磁质有 $|\chi_m|\ll 1$, 所以有 $\lambda_m\approx\chi_m$. 值得注意, 对铁磁质有 $\chi_m\gg 1$. 这时 λ_m 不宜代替 χ_m 作为描述磁化的参量.

率有关. 在第 9 章中讨论介质对电磁波的吸收时会看到,若把变化电场按频率分解后写成复数形式,即 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0 e^{i\omega t}$,介质相应的极化强度将为 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0 e^{i\omega t+\alpha}$. 如果 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{P}$ 仍成正比,则比例系数 χ_e 是复数. 它的模代表 E_0 与 P_0 之比,其幅角代表极化相对于电场的相位滞后. 这里的相位滞后是强迫振动对外强迫力有相位滞后的体现.

(4) 如果场强太大,这种线性关系将被破坏. 这里的情况与弹性学中的胡克定律有些类似. 当对弹性体的拉力超过了弹性限度,弹性体的伸长将不再与力成正比. 如果外力再加大,弹性体会断裂. 在电场使介质极化时,当电场强度过大,极化程度会无法正比地增加. 若电场强度再加大,介质就会发生电击穿. 至于场强太大的标准,则视介质而异,不能一概而论.

上面谈论的介质指的是绝缘介质. 现在再对导体作一点补充.

导体中能自由运动的仅为部分价电子,其大部分电子仍束缚在原子核的周围. 对于束缚电子,上面讨论的极化和磁化将同样地发生. 因此导体也有它自身的极化率 χ_e 和磁化率 χ_m. 差别在于导体中的部分电子会在电场的作用下自由流动. 这就是传导电流. 经验表明,传导电流密度与电场强度成正比,即

$$j=\sigma E, \tag{1.7.5}$$

其中的 σ 是导体的电导率. 这关系式也被称作欧姆定律. 值得注意,(1.7.5)式是有条件地成立的. 在导体内,还可以有非电的因素导致自由电子的流动. 例如不同地方的电子数密度有差别,或两种导体表面的化学势有差别等. 这样引起的电子流动也同样表现为传导电流,但它却没有包括在(1.7.5)式中. 我们以后将只讨论单一均匀的导电介质. 这情况下传导电流将只由电场引起.

1.8 介质中的麦克斯韦方程

在上一节中讨论了电磁场对介质的影响. 现在讨论问题的另

一方面，即极化并磁化了的介质将如何影响电磁场．按照麦克斯韦方程，带电系统对电磁场的影响是通过它的电荷和电流来实现的．因此我们先分析介质由极化和磁化引起的电荷分布和电流分布．

从上节的分析知道，极化介质可看作大量偶极子构成的系统；单位体积的偶极矩由极化强度 $\boldsymbol{P}$ 描述．为考虑它产生的电场，我们等效地写成

$$\boldsymbol{P} = Nq_{\mathrm{p}}\boldsymbol{l} = \rho_{\mathrm{p}}\boldsymbol{l}, \tag{1.8.1}$$

其中 N 是单位体积内的偶极子数，$q_{\mathrm{p}}\boldsymbol{l}$ 是每个偶极子的偶极矩．这里的 ρ_{p} 是由于偶极矩的存在而等效地产生的电荷密度．为与能自由流动的电荷相区别，它常被称为束缚电荷．在介质中任取一闭面，$\boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\rho_{\mathrm{p}}\boldsymbol{l}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 是偶极子通过元面 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 而伸出闭面外的电量（图 1.9）．所以，这闭面内的束缚电荷的总电量为

$$\iiint \rho_{\mathrm{p}}\mathrm{d}\tau = -\oiint \boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}. \tag{1.8.2}$$

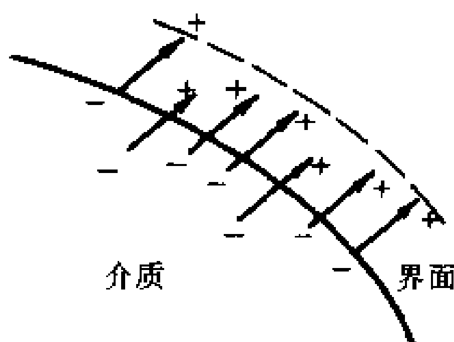


图 1.9 偶极子一端伸出界面

把这关系化成微分形式，得到束缚电荷密度

$$\rho_{\mathrm{p}} = -\nabla\cdot\boldsymbol{P}. \tag{1.8.3}$$

从这式子看出，仅当介质的极化不均匀时，介质内部才会有体束缚电荷密度出现．若极化为均匀，则束缚电荷将只出现在介质的表面上．若表面外为真空，相应的面束缚电荷密度为

$$\Sigma_{\mathrm{p}} = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P}, \tag{1.8.4}$$

其中的法向单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 以向外为正. 在第 2 章中将证明,这些体分布和面分布的束缚电荷所产生的电场与原有的偶极矩所产生的电场是一样的. 正因此,我们才能把束缚电荷看成是介质极化的一种等效描述.

若极化随时间变化,这必定是束缚电荷有移动的宏观表现. 相应的等效电流叫极化引起的诱导电流,记作 $\boldsymbol{j}_p$. 从束缚电荷的守恒性有

$$\frac{\partial \rho_p}{\partial t} = -\nabla\cdot \boldsymbol{j}_p. \tag{1.8.5}$$

与(1.8.3)对比,得出

$$\boldsymbol{j}_p = \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}. \tag{1.8.6}$$

接着讨论如何等效地用电流来描述磁化的效果. 从上节的分析知道,磁化介质可看成大量小电流圈(即磁偶极子)构成的系统. 磁化强度是单位体积内的磁矩. 因此可写出

$$\boldsymbol{M} = NI\boldsymbol{S}, \tag{1.8.7}$$

其中 N 是单位体积的磁偶极子数,I 和 $\boldsymbol{S}$ 分别是电流圈的电流强度和面积(小电流圈的磁矩为 $I\boldsymbol{S}$ 的证明参看第 3 章). 在介质中取一个任意的有限曲面,单位时间内各电流圈流过它的电量,就是磁矩引起的等效电流的强度. 考虑到一个电流圈穿过曲面两次,它对等效电流将没有贡献. 因此,只有曲面边界附近的电流圈才有贡献(图 1.10). 这样易于看出,等效电流强度为

$$\iint \boldsymbol{j}_m \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \oint NI\boldsymbol{S} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint \boldsymbol{M} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}, \tag{1.8.8}$$

其中 $\boldsymbol{j}_m$ 是等效的体电流密度. 它被称为磁化电流密度. 上式中的回路积分是对所取曲面的边界作的. 利用斯托克斯定理,把它也化成面积分,于是得到

$$\boldsymbol{j}_m = \nabla\times \boldsymbol{M}. \tag{1.8.9}$$

当介质分布在有限区域内时,界面上应有等效的面电流密度. 它是

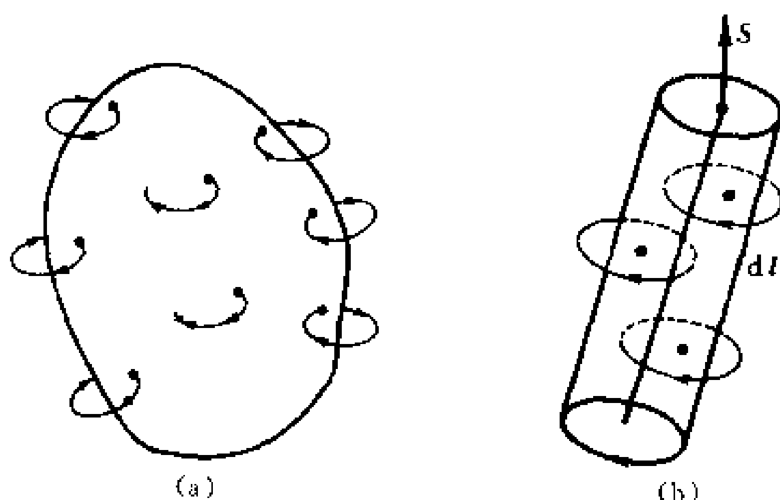


图 1.10　挂在面缘上的电流圈

$$\boldsymbol{K}_m = -\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{M}. \tag{1.8.10}$$

同样可以证明，这些磁化电流所产生的磁场与原来的磁矩所产生的磁场是一致的.

上面的分析推导说明，介质的极化和磁化可以等效地用束缚电荷，极化诱导电流和磁化电流来描述，而且它们的大小和方向都完全由极化强度 $\boldsymbol{P}$ 及磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 决定. 把这些结果代入真空中的麦克斯韦方程，我们得到

$$\nabla\cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho + \rho_p) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon_0}\ \nabla\cdot \boldsymbol{P}, \tag{1.8.11}$$

$$\nabla\times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{1.8.12}$$

$$\nabla\cdot \boldsymbol{B} = 0, \tag{1.8.13}$$

$$\begin{aligned}\nabla\times \boldsymbol{B} &= \mu_0(\boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}_m + \boldsymbol{j}_p) + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\\ &= \mu_0\boldsymbol{j} + \mu_0\ \nabla\times \boldsymbol{M} + \mu_0\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t},\end{aligned} \tag{1.8.14}$$

这里用不带下标的 ρ 和 $\boldsymbol{j}$ 分别代表自由电荷密度和传导电流密度. 人们的目标正是从已知的自由电荷和传导电流的密度来求解介质中的电磁场. 现在介质的影响已包含在第一和第四两式右边的附加项中了.

从这组方程的结构看，引入导出量 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 是方便的. 它们分别被定义为

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}, \tag{1.8.15}$$

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{M}. \tag{1.8.16}$$

这样引入的 $\boldsymbol{D}$ 被称为电位移强度或电感应强度，而 $\boldsymbol{H}$ 则被称为磁场强度. 引用 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{H}$，介质中的麦克斯韦方程可重新写成

$$\nabla\cdot \boldsymbol{D} = \rho, \tag{1.8.17}$$

$$\nabla\times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{1.8.18}$$

$$\nabla\cdot \boldsymbol{B} = 0, \tag{1.8.19}$$

$$\nabla\times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}. \tag{1.8.20}$$

这组方程的形式与真空中的麦克斯韦方程很有些类似，但是差别是重要的. 这里仅有第一和第四式中的 $\varepsilon_0\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}/\mu_0$ 改换成了 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{H}$，而第二和第三式却没有相应的替换；于是方程组中涉及了四个场量 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{H}$. 我们知道，真空中的麦克斯韦方程是一个完备的方程组. 若已知场源 ρ 和 $\boldsymbol{j}$，配合适当的边条件及初条件，它将有完全确定的解. 方程组(1.8.17)～(1.8.20)则因为它涉及了四个场量而不是完备的，其物理原因在于这方程组中尚没有反映介质的具体电磁性质. 上节已分析过，在不同的介质中，极化强度 $\boldsymbol{P}$(及 $\boldsymbol{D}$)与 $\boldsymbol{E}$ 有不同的关系，磁化强度 $\boldsymbol{M}$(及 $\boldsymbol{H}$)与 $\boldsymbol{B}$ 之间关系也如此. 我们须把具体的介质特性考虑进去，才会得到一个完备的方程组.

为了做到这一点，我们限于讨论线性介质中的麦克斯韦方程. 这类介质中的极化和磁化关系由(1.7.1)和(1.7.2)式描述. 利用它，易于得到导出量 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 对基本场量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的依赖关系. 这关系也是线性的. 它被表成

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \tag{1.8.21}$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}/\mu, \tag{1.8.22}$$

其中的 ε 叫做介电系数，μ 做叫磁导率．介电系数 ε 与极化率 χ_e 的关系是

$$\varepsilon = \varepsilon_0(1 + \chi_e). \tag{1.8.23}$$

上节的附注中已提到，人们把 $\boldsymbol{M}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 之间的比例系数 χ_m 叫做磁化率．这样，磁导率 μ 与磁化率 χ_m 的关系为

$$\mu = \mu_0(1 + \chi_m). \tag{1.8.24}$$

注意到 χ_e 和 χ_m 都是无量纲的系数，所以介电系数 ε 与 ε_0 有相同的量纲，而磁导率 μ 与 μ_0 有相同的量纲．

把线性关系(1.8.21)和(1.8.22)代入方程组(1.8.17)～(1.8.20)，得到

$$\nabla\cdot \boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon, \tag{1.8.25}$$

$$\nabla\times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{1.8.26}$$

$$\nabla\cdot \boldsymbol{B} = 0, \tag{1.8.27}$$

$$\nabla\times \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{j} + \varepsilon\mu\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}. \tag{1.8.28}$$

这就是线性各向同性介质中的麦克斯韦方程组．它与真空中的麦克斯韦方程组的差别仅是用介质的介电系数 ε 代替了 ε_0，并用介质的磁导率 μ 代替了 μ_0．人们常把 ε_0 和 μ_0 称为真空介电常数和真空磁导率，其原因就在这里．从上面的推导看出，这种替代是考虑了介质影响的后果．

1.9　介质界面上的电磁规律

当用微分方程来表示电磁场的规律，显然它只适用于场量为连续变化的情形．若空间有两种不同的介质(例如固体和气体)，其界面两边的介电系数和磁化率有跳变．相应地，场量也会有跳变．在这里微分方程就失效了．注意这是出于场量的微分不存在，而不是电磁规律失效．因此，我们可从积分形式的麦克斯韦方

程来导出介质界面上相应的电磁规律.

与(1.8.17)～(1.8.20)相对应,麦克斯韦方程的积分形式是

$$\oiint \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \iiint \rho \mathrm{d}\tau, \tag{1.9.1}$$

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}, \tag{1.9.2}$$

$$\oiint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = 0, \tag{1.9.3}$$

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial}{\partial t} \iint \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}. \tag{1.9.4}$$

把积分形式的方程用于边界附近的方法是熟知的. 当用到(1.9.1)和(1.9.3),积分体积取成扁罐状;而用(1.9.2)和(1.9.4)时,积分回路则取成窄条形.

把两种介质分别称为介质 1 和介质 2. 界面的法向单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 规定为从介质 1 指向介质 2. 这样易于从(1.9.1)和(1.9.3)得出

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1) = \Sigma, \tag{1.9.5}$$

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_1) = 0, \tag{1.9.6}$$

其中 Σ 是自由电荷的面密度. 然后从(1.9.2)和(1.9.4)导出

$$\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) = 0, \tag{1.9.7}$$

$$\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1) = \boldsymbol{K}, \tag{1.9.8}$$

其中 $\boldsymbol{K}$ 是传导电流的面密度. 这样得到的是一组简单的代数方程,它把介质界面两边的场量联系了起来. 人们常把它叫作电磁场的边界连接条件. 这里我们强调,它本质上是麦克斯韦方程在边界上的体现.

当用于各向同性的线性介质,(1.9.5)及(1.9.8)式可用 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{B}$ 表成

$$\boldsymbol{n} \cdot (\varepsilon_2 \boldsymbol{E}_2 - \varepsilon_1 \boldsymbol{E}_1) = \Sigma, \tag{1.9.9}$$

$$\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{B}_2/\mu_2 - \boldsymbol{B}_1/\mu_1) = \boldsymbol{K}. \tag{1.9.10}$$

(1.9.6)和(1.9.7)式不需改变. 从这些式子看出,在这样的介质

中，电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的切向分量和磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的法向分量仍是连续的. 而 $\boldsymbol{E}$ 的法向分量和 $\boldsymbol{B}$ 的切向分量却一般是不连续的. 当界面两边的介电系数和磁导率不同，即使界面上没有面电荷和面电流，$\boldsymbol{E}$ 的法向分量和 $\boldsymbol{B}$ 的切向分量将有跳变. 另外我们看到，面自由电荷或面传导电流的存在也是引起跳变的因素.

第2章 静电问题

2.1 静电势和泊松方程

本章讨论均匀各向同性的线性介质中的静电问题．按照介质中的麦克斯韦方程，静电场应满足微分方程

$$\nabla\cdot \boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon, \tag{2.1.1}$$

$$\nabla\times \boldsymbol{E} = 0. \tag{2.1.2}$$

这组方程与1.1节中由库仑定律导出的方程的差别在于用介质的介电系数 ε 代替了真空介电常数 ε_0．这一替代把介质对场的影响包括进去了．因此，现在这方程中的 ρ 仅指自由电荷的密度．

根据数学知道，无旋场必定有势．把静电势记作 φ，它被定义为

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi. \tag{2.1.3}$$

这定义式中的负号是为了与引力势的定义相一致而引入的．习惯上，人们让引力指向引力势减小的方向．因此这里也让电场指向电势减小的方向．

引入了电势 φ，方程(2.1.2)已自动满足．把 φ 的定义式代入方程(2.1.1)，得到

$$\nabla^2\varphi = -\rho/\varepsilon. \tag{2.1.4}$$

这就是静电势所必须满足的微分方程式．在数学上，这种方程叫做泊松方程．引用电势 φ 代替电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的好处在于 φ 是标量，而 $\boldsymbol{E}$ 是矢量．用标量作计算有诸多方便之处．

上面的方程只适用于介质（以后不再特别指明介质为均匀，线性和各向同性）内部场量为连续的区域．当空间有两种不同的介

质,按1.9节的讨论,边界上的电磁规律表现为一个代数关系,即

$$\varepsilon_1 \frac{\partial\varphi}{\partial n_1} + \varepsilon_2 \frac{\partial\varphi}{\partial n_2} = \Sigma, \tag{2.1.5}$$

其中的Σ是介质界面上的自由电荷面密度. 为了便于记忆,这里写成了对两种介质对称的形式,式中的法向微商对两种介质都以向外为正. 当用φ描述电场,我们还需要φ自身的边界关系. 考虑到边界两边电势的差$\Delta\varphi = -\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}$,不管对绝缘体的边界或导体边界,边界上的电场强度都不会发散,因此φ在界面上连续,即

$$\varphi_1 = \varphi_2. \tag{2.1.6}$$

从计算的角度讲,(2.1.5)和(2.1.6)式构成了完备的边界关系.

静电势φ在介质内部满足微分方程(2.1.4),在不同介质的界面上须满足代数关系(2.1.5)和(2.1.6). 这些公式将是我们讨论静电问题的出发点. 当然,在有的情况下直接运用库仑定律更方便,那时我们就以库仑定律为出发点.

2.2 偶极子和四极子

我们已一再提到,静电场具有可叠加性. 一个复杂的场常表现为若干种简单场的叠加. 因此,若先对静电场的几种基本形式有清楚的了解,这对处理和理解复杂的情况都是有帮助的.

单个点电荷的场当然是最基本的. 直接由介质中的库仑定律知道,它的电场是

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^2}, \tag{2.2.1}$$

其中$\boldsymbol{r}_0$是点电荷的位置矢量. 按电势的定义$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi$,立即可算出

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}, \tag{2.2.2}$$

人们也常把这电势公式叫作库仑定律.

作为点电荷的叠加，最简单的情况是由两个电量相等而反号的点电荷构成的电荷对．为一般起见，设电荷 q 处于 $\boldsymbol{r}_+$ 的位置，而电荷 $-q$ 处于 $\boldsymbol{r}_-$ 的位置．图 2.1 画出了这个系统．若我们感兴趣于它在远处，即在 $r\gg r_+\sim r_-$ 处产生的电场，相应将引出偶极场的概念．

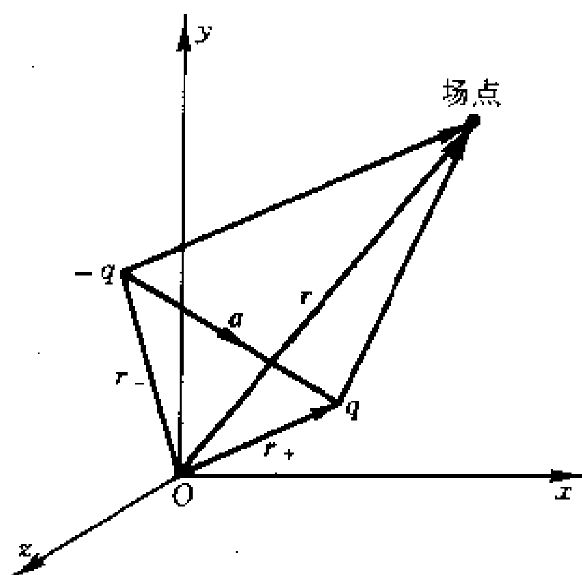


图 2.1　正负电荷对

按照叠加原理，由(2.2.2)式可立即写出这系统的电势

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{q}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_+|}+\frac{-q}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_-|}\right).\qquad(2.2.3)$$

当 $r\gg r_+$，把上式右边第一项在 $\boldsymbol{r}_+=0$ 附近作泰勒展开(参看附录 1 的(A1.30))，有

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_-|}=\frac{1}{r}+\frac{\boldsymbol{r}_+\cdot\boldsymbol{e}_r}{r^2}+\cdots,\qquad(2.2.4)$$

其中 $\boldsymbol{e}_r=\boldsymbol{r}/r$ 是 $\boldsymbol{r}$ 方向的单位矢量．第二项的展开完全类似．只须用 $\boldsymbol{r}_-$ 代替 $\boldsymbol{r}_+$ 即可．把这两个展开式代入(2.2.3)后看出，两者的首项相抵消．因此为得到非零的领头项，我们在展开式中保留了两项．这样，写出 φ 的非零领头项是

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_r}{r^2},\qquad(2.2.5)$$

其中 $\boldsymbol{p}=q(\boldsymbol{r}_+-\boldsymbol{r}_-)=q\boldsymbol{a}$，称为这系统的偶极矩．注意其中的 $\boldsymbol{a}$ 是从负电荷指向正电荷的位置矢量．因此，偶极矩 $\boldsymbol{p}$ 描述的是系统的内禀性质，而与原点的选择无关．

现在我们讨论偶极子和偶极场的概念．人们把严格用(2.2.5)式描述的静电场叫做偶极场，并把相应的场源叫做位于 $\boldsymbol{r}=0$ 处的偶极子．从(2.2.5)式的导出过程看，偶极子一方面须有确定的偶极矩 $\boldsymbol{p}=q\boldsymbol{a}$，另一方面须有间距 $a\to 0$，所以偶极子是一种理想的电荷系统．对于正负电荷有有限间隔的系统，上面的分析说明，它在远处的场才近似地是偶极场．被忽略的场强与偶极场强之比是 a/r 的量级．从这意义上说，这种电荷对可近似地被当作偶极子．在需要更高精度的结果时，应当把泰勒展开中的高次项算进去，这将是我们在下节中要讨论的内容．

偶极子的电场强度可直接对(2.2.5)式作梯度运算得到．设偶极子位于坐标原点上，则它的电场强度是

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon}\,\frac{3\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_r-\boldsymbol{p}}{r^3}. \qquad (2.2.6)$$

当偶极子 $\boldsymbol{p}$ 的方向与 x 轴一致，(2.2.6)式化作

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon}\,\frac{p}{r^3}\left(\frac{3x}{r}\boldsymbol{e}_r-\boldsymbol{e}_x\right). \qquad (2.2.7)$$

作为偶极场的例子，我们这里重新讨论一下介质极化的后果．在1.7节中已指出，极化后的介质是一个连续分布的偶极子系统，其单位体积的偶极矩为 $\boldsymbol{P}$．按(2.2.5)式，它产生的电势应为

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\epsilon}\iiint\frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\,\mathrm{d}\tau', \qquad (2.2.8)$$

利用附录中的数学公式(A1.10)和(A1.2)，被积函数可化成

$$\begin{aligned}\frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}&=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')\cdot\nabla'\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\\&=\nabla'\cdot\left(\frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)-\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|},\end{aligned} \qquad (2.2.9)$$

代回(2.2.8)，再用高斯定理把右边第一项化成闭面积分，于是得到

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\oint\!\!\!\oint\frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}+\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint\frac{-\nabla'\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\tau' \tag{2.2.10}$$

这式子右边的第二项相当于电荷密度 $\rho_p=-\nabla\cdot P$ 所产生的电势，而第一项则相当于边界上有面电荷密度 $\Sigma_p=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}$ 时所产生的电势．这样，我们通过直接计算极化介质中的偶极子的电场，得到的是与以前同样的结果．

然后进一步讨论四极子的概念．图 2.2 中画出了两种由四个点电荷构成的系统．(a)图画的是两个 x 方向距离为 x_0 的反向电荷对，它们沿 x 方向错开了距离 x_1．(b)图画的是同样两个电荷对，它们沿 y 方向错开了距离 y_0．当然，(b)图画的系统也可看成两个 y 方向距离为 y_0 的反向电荷对，它们沿 x 方向错开了距离 x_0．若我们对它们在远处的电场感兴趣，相应地将引申出四极场的概念．因此这两种系统代表了四极子的两个基本的位形．

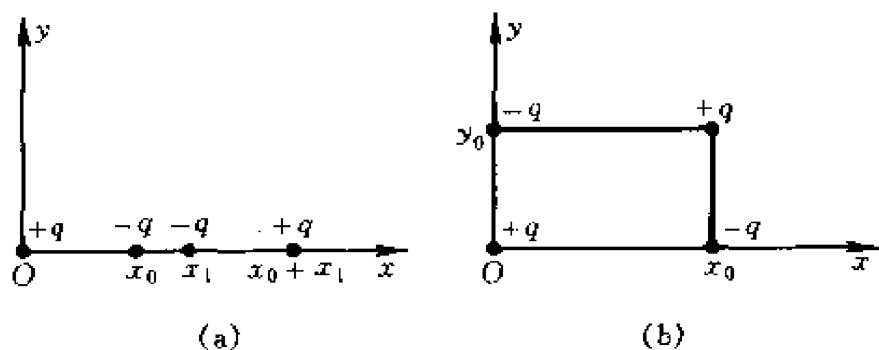


图 2.2　两种四极子

先写出(a)图的系统所产生的电场．它是

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{q}{r}+\frac{-q}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}_0|}+\frac{-q}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}_1|}+\frac{q}{\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{x}_1)|}\right). \tag{2.2.11}$$

当感兴趣于它在 $r\gg x_0\sim x_1$ 处的电场，同样把各项在 $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{x}_1=0$ 附

近作泰勒展开. 现在须在展开式中保留三项,才能得出非零的领头项. 附录1中写出了所要的展开式. 用于我们的问题,相应的展开式是

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}_0|}=\frac{1}{r}+\frac{\boldsymbol{x}_0\cdot\boldsymbol{e}_r}{r^2}+\frac{\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{x}_0:(3\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_r-\overleftrightarrow{I})}{2r^3}+\cdots,\tag{2.2.12}$$

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}_1|}=\frac{1}{r}+\frac{\boldsymbol{x}_1\cdot\boldsymbol{e}_r}{r^2}+\frac{\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_1:(3\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_r-\overleftrightarrow{I})}{2r^3}+\cdots,\tag{2.2.13}$$

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}_1|}=\frac{1}{r}+\frac{(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{x}_1)\cdot\boldsymbol{e}_r}{r^2}+\frac{(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{x}_1)(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{x}_1):(3\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_r-\overleftrightarrow{I})}{2r^3}+\cdots,\tag{2.2.14}$$

代回(2.2.11),得出电势φ的领头项为

$$\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{(\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_0):(3\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_r-\overleftrightarrow{I})}{2r^3}.\tag{2.2.15}$$

对(b)图的系统在远处的电场可用完全同样的方法计算. 相应的结果是

$$\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{(\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{y}_0+\boldsymbol{y}_0\boldsymbol{x}_0):(3\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_r-\overleftrightarrow{I})}{2r^3}.\tag{2.2.16}$$

与偶极场的概念一样,人们把严格由这种公式描述的电场称为四极场,并把相应的场源叫四极子. 为此我们需要引入系统的四极矩来描写它的性质.

上述系统中不仅总电量为零,而且其总偶极矩也为零. 从(2.2.15)或(2.2.16)看,它们产生的电场取决于系统的二级矩$\overleftrightarrow{\mathscr{D}}$,它被定义为

$$\overleftrightarrow{\mathscr{D}}=\sum_n q_n\boldsymbol{r}_n\boldsymbol{r}_n,\tag{2.2.17}$$

其中 q_n 是第 n 个点电荷的电量，$\boldsymbol{r}_n$ 是它的位置矢量. 这是一个对称的二阶张量，即 $\mathscr{D}_{ij}=\mathscr{D}_{ji}$，因此它有六个独立的分量. 为看清每个分量的物理意义，我们回到图 2.2 所示的系统. 由定义不难算出，(a)图系统的二级矩为

$$\overleftrightarrow{\mathscr{D}} = q(\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_0) \tag{2.2.18}$$

这说明它的二级矩只有一个非零分量，即 $\mathscr{D}_{xx}=2qx_0x_1$. 显然，若这样的位形放置在 y 轴或 z 轴上，则系统的二级矩将只有 $\mathscr{D}_{yy}$或 $\mathscr{D}_{zz}$不为零. 为看清其非对角分量的物理意义，我们讨论(b)图的系统. 按定义写出它的二级矩为

$$\overleftrightarrow{\mathscr{D}} = q(\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{y}_0 + \boldsymbol{y}_0\boldsymbol{x}_0). \tag{2.2.19}$$

从这式子看出，它只有两个非零分量，即 $\mathscr{D}_{xy}=\mathscr{D}_{yx}=qx_0y_0$. 如果把 $\mathscr{D}_{xy}$的意义解释成 x 方向的两个电荷对在 y 方向错了位，那么 $\mathscr{D}_{yx}$就反映 y 方向的两个电荷对在 x 方向错了位. 前面已指出，对(b)图的系统可作两种不同的解释，其原因正在这里. 若把(b)图的系统放在 x-z 或 y-z 平面上，系统的二级矩的非零分量就会用其他非对角分量描述.

在引入二级矩后，任一四极子的电场可统一地写成

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\overleftrightarrow{\mathscr{D}} : (3\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_r - \overleftrightarrow{I})}{2r^3}. \tag{2.2.20}$$

它说明系统的二级矩能完全决定它的四极场. 但是反之则不然. 二级矩有六个独立分量，但是由(2.2.20)式可证明，$\mathrm{tr}\overleftrightarrow{\mathscr{D}}=\mathscr{D}_{xx}+\mathscr{D}_{yy}+\mathscr{D}_{zz}$的大小对四极场的电势没有影响. 为了只保留对四极场有影响的独立分量，人们重新定义了一个张量

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{D}} = 3\overleftrightarrow{\mathscr{D}} - (\mathrm{tr}\overleftrightarrow{\mathscr{D}})\overleftrightarrow{I}. \tag{2.2.21}$$

它被称为系统的四极矩. 定义式中出现的数字因子 3 不具有实质意义. 重要的是它扣除了二级矩的迹. 注意到 $\mathrm{tr}\,\overleftrightarrow{I}=3$，由定义(2.2.21)看出，

$$\mathrm{tr}\overleftrightarrow{\boldsymbol{D}} = 3\mathrm{tr}\overleftrightarrow{\mathscr{D}} - \mathrm{tr}\overleftrightarrow{\mathscr{D}}\mathrm{tr}\overleftrightarrow{I} = 0, \qquad (2.2.22)$$

即 $D_{xx}+D_{yy}+D_{zz}=0$. 这样定义的四极矩 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{D}}$ 是一个无迹的对称张量. 它只有五个可独立取值的分量,且每一个分量都对四极场有独立的贡献. 引入四极矩 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{D}}$ 代替 $\overleftrightarrow{\mathscr{D}}$ 的主要目的在这里.

这样我们需要用四极矩 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{D}}$ 来表示四极场的电势. 利用附录中的(A1.31)式,四极势公式(2.2.20)可化成

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{\overleftrightarrow{\boldsymbol{D}} : \boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_r}{2r^3}, \qquad (2.2.23)$$

人们常把它作为四极势的基本公式. 让我们注意,在实际计算某系统的四极势时,使用(2.2.23)或(2.2.20)式,其结果是一样的.

2.3 静电场的多极展开

现在我们讨论有限区域内任意的电荷源所产生的静电场.

在这种情况下,以区域内任一点 O 为心,总可作出一个球面,使源电荷全部包在这球面之内(图 2.3). 若我们仅感兴趣于球面之外的电场,下面将证明,

总场 = 单极场 + 偶极场 + 四极场 + …

这就是静电场的多极展开.

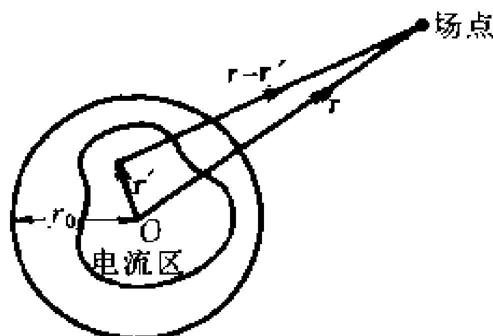


图 2.3 局域的电荷源

首先由库仑定律可写出任意分布电荷的总电势

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon}\iiint \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\tau'. \tag{2.3.1}$$

把被积函数中的$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$在 $\boldsymbol{r}'=0$ 附近作泰勒展开. 按附录中的(A1.33),有

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{e}_r}{r^2} + \frac{(3\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}' - r'^2\overleftrightarrow{I}):\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_r}{2r^3} + \cdots, \tag{2.3.2}$$

代入(2.3.1)式后,总电势成了一个 $1/r$ 的幂级数. 先把它写成

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots, \tag{2.3.3}$$

然后,让我们逐项讨论它的物理意义.

第一项 φ_0 的形式是

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{Q}{r}, \tag{2.3.4}$$

其中

$$Q = \iiint \rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau' \tag{2.3.5}$$

是系统的总电量. 由此看到,φ_0 相当于把全部电荷集中到 0 点时所产生的电场. 所以这一项是单极场.

第二项 φ_1 的形式是

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_r}{r^2}, \tag{2.3.6}$$

其中

$$\boldsymbol{p} = \iiint \rho(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{r}'\mathrm{d}\tau' \tag{2.3.7}$$

是系统的总偶极矩. 因此 φ_1 是位于 0 点的一个偶极矩为 $\boldsymbol{p}$ 的偶极子所产生的电势.

以前我们仅对等量反号的点电荷对定义过偶极矩,而(2.3.7)式则把偶极矩的概念推广到了任意的电荷系统. 因此我们须重新考察它的含义.

对于由 n 个点电荷组成的系统,总偶极矩公式(2.3.7)写成

$$p = \sum_n q_n r_n. \tag{2.3.8}$$

它是各个点电荷的一级矩的矢量和. 若系统只包含$+q$和$-q$两个点电荷,则

$$p = q r_+ + (-q) r_- = q(r_+ - r_-). \tag{2.3.9}$$

这与我们熟知的结果是一致的. 因此(2.3.7)式是原有的偶极矩概念的自然推广. 值得注意,对总电量为零的系统,由(2.3.7)式定义的总偶极矩与参考点的选择无关;而若$Q\neq 0$,则其总偶极矩与参考点是有关的. 当然,系统在某点产生的总电势是不会受参考点的影响的.

为看清φ_2的形式,须先把其中的积分部分整理一下. 注意在电荷连续分布时,系统的二级矩是

$$\overleftrightarrow{\mathscr{D}} = \iiint \rho(r') r' r' \mathrm{d}\tau'. \tag{2.3.10}$$

由此推知

$$\mathrm{tr}\overleftrightarrow{\mathscr{D}} = \iiint \rho(r') r'^2 \mathrm{d}\tau', \tag{2.3.11}$$

$$\overleftrightarrow{D} = \iiint \rho(r')(3r'r' - r'^2 \overleftrightarrow{I})\mathrm{d}\tau'. \tag{2.3.12}$$

这样看出,电势展开式的第三项有形式

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{\overleftrightarrow{D} : e_r e_r}{2r^3}, \tag{2.3.13}$$

即它是一个四极场.

在上节中,我们对四极子定义了它的四极矩. 现在同样把这个量的定义推广到了任意的电荷系统. 为此用它讨论两个简单的情形.

首先考虑一个球对称分布的电荷系统. 按$\overleftrightarrow{\mathscr{D}}$的定义易于看出,由于系统的对称性,所以它的非对角元都是零,而三个对角元则相等. 再利用$\overleftrightarrow{D}$和$\overleftrightarrow{\mathscr{D}}$的关系式(2.3.12),容易算出四极矩$\overleftrightarrow{D}$的每一个分量都是零,这说明球对称的系统不产生四极场. 其实

我们早已知道，球对称电荷系统的场与一个中心点电荷的场是完全相当的. 从多极展开的角度讲，这意味着它既不产生偶极场，也不产生四极场以及更高级的多极场. 这里只是作为计算四极矩的例子，论证了球对称系统的四极矩和四极势都为零. 从这例子也看到，这系统不产生四极场，但它的二级矩却并不为零. 这正是人们要引入 $\overleftrightarrow{D}$ 代替 $\overleftrightarrow{\mathscr{D}}$ 的原因.

再讨论一个相对 z 轴为旋转椭球状的均匀电荷系统. 按它的对称性，同样可知道它的四极矩的非对角元为零，且有 $D_{xx}=D_{yy}\neq D_{zz}$. 考虑到 $D_{xx}+D_{yy}+D_{zz}=0$，所以这系统的四极矩张量可表成

$$\overleftrightarrow{D}=\begin{pmatrix} -D_{zz}/2 & 0 & 0 \\ 0 & -D_{zz}/2 & 0 \\ 0 & 0 & D_{zz} \end{pmatrix}, \qquad (2.3.14)$$

代入公式(2.3.13)，即可得到它的四极势的具体形式，

$$\varphi_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{D_{zz}}{4r^3}(3\cos^2\theta-1). \qquad (2.3.15)$$

原子核是一个尺度很小但内部电荷分布很复杂的系统. 对于非球对称的核，人们常把它简化为均匀的旋转椭球. 从微观讲，原子核的确定的宇称保证了它的偶极矩为零. 这样，它产生的电场可近似成单极场加四极场. 上面的分析说明，它的四极场有(2.3.15)的简单形式，其中只包含一个待定参量. 这是在微观领域中应用多极展开理论的一个实例.

让我们回到多极展开的一般理论. 前面已讨论了展开式的前三项. 第四项应是八极场. 因它极少被用到，我们不再继续讨论. 这样，静电场的多极展开公式可写成

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{Q}{r}+\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_r}{r^2}+\frac{\overleftrightarrow{D}:\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_r}{2r^3}+\cdots\right). \qquad (2.3.16)$$

下面再从应用的角度作一些讨论.

理论上这公式的适用范围为 $r>r_0$，因为这展开式中后项和前

项之比有相同的量级，即

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_0} \sim \frac{\varphi_2}{\varphi_1} \sim \cdots \sim \frac{r_0}{r} < 1. \qquad (2.3.17)$$

数学保证这级数是收敛的．在实用上，人们只能在 $r \gg r_0$ 的条件下使用它．仅当后项与前项之比远小于 1，我们才能把领头项作为总场的好的近似，并把下一项作为主要的修正．当 $Q \neq 0$，由总电量决定的点电荷场 φ_0 就近似地描述了总场．若需要更高精度的结果，则可加上偶极修正．当 $Q=0$，则由系统总偶极矩决定的偶极场是总场的近似．在需要时才计算四极修正．仅对 $Q=0$ 且 $p=0$ 的系统，四极场才是领头项．上面提到原子核的例子，正是按这样的精神做的．展开中的高级项极少被用到，也是这个原因．

在微观物理中，分子、原子或原子核等都是复杂的电荷系统，且人们对它内部电荷分布的细节并不清楚．按多极展开理论，它在远处产生的电场可以分解成几种简单多极场的叠加．这样人们就可以不探究其内部电荷分布的细节，而用其总电量、偶极矩等少数几个参量来确定它的电场，因此这是常用而有效的方法．

2.4 多极子在外电场中的势能

这一节中讨论刚性多极子在外电场中的势能．首先我们先从电磁学的角度分析一下静电势能的本质．

力学理论已告诉我们，静电力是保守力，因此电荷在外电场中有势能存在，且其动能和势能之和在运动中保持守恒．具体地说，点电荷在外电场中的势能是

$$V = q\varphi_{外}, \qquad (2.4.1)$$

其中 $\varphi_{外}$ 是外场的电势．另一方面，在 1.5 节中曾一般地讨论过电磁作用下的能量守恒的问题，并指出，电力做功使运动电荷动能的增加应由静电场能的减少来补偿．把这两方面联系起来看，力学中所指的静电势能应是静电场场能的体现．下面来论证这一点．

设有点电荷在外电场 $E_{外}(\boldsymbol{r})$ 中运动. 任一时刻全空间的电场总能量为

$$U=\frac{\varepsilon}{2}\iiint\limits_{(\infty)}|\boldsymbol{E}_{外}+\boldsymbol{E}|^2\,\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{\varepsilon}{2}\iiint\limits_{(\infty)}E_{外}^2\,\mathrm{d}\tau+\frac{\varepsilon}{2}\iiint\limits_{(\infty)}E^2\,\mathrm{d}\tau+\varepsilon\iiint\limits_{(\infty)}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}_{外}\,\mathrm{d}\tau,$$

(2.4.2)

其中 $\boldsymbol{E}$ 是该点电荷所产生的电场. 因外电场是恒定的,所以右边第一项不会改变. 第二项是点电荷单独存在时的场能,它也是不变的. 第三项是两部分电场的交叉项,它与点电荷在外场中的位置有关. 当点电荷在运动,电场总场能的变化仅来自第三项. 下面将证明,这一项正是力学中所指的静电势能.

利用 $E_{外}=-\nabla\varphi_{外}$,第三项中的被积函数可化成

$$\varepsilon\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}_{外}=-\varepsilon\boldsymbol{E}\cdot\nabla\varphi_{外}=-\varepsilon\nabla\cdot(\varphi_{外}\boldsymbol{E})+\varepsilon\varphi_{外}\nabla\cdot\boldsymbol{E}$$

$$=-\varepsilon\nabla\cdot(\varphi_{外}\boldsymbol{E})+\rho\varphi_{外},\tag{2.4.3}$$

式中的 ρ 来自场方程 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon$. 考虑到外场的场源也只能存在于有限空间之内,因此有

$$\iiint\limits_{(\infty)}\nabla\cdot(\varphi_{外}\boldsymbol{E})\mathrm{d}\tau=\oint\!\!\!\oint\limits_{(\infty)}\varphi_{外}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=0.\tag{2.4.4}$$

把这些考虑用入总场场能的表达式(2.4.2),它可写成

$$U=\iiint\rho(\boldsymbol{r})\varphi_{外}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau+\text{const.},\tag{2.4.5}$$

在运动体为点电荷的情况下,它化作

$$U=q\varphi_{外}+\text{const.},\tag{2.4.6}$$

这样就证实了:力学中所用的静电势能与静电场的场能只差一个常数.

当进一步考虑一个刚性分布的电荷系统时,容易看清,上面的分析仍完全适用. 这样我们可以把(2.4.5)式作为它在外场中的势能的定义. 下面由它来导出多极子在外电场中的势能.

设电荷系统的线度很小，以致外电场在这区域内没有剧烈的变化．这样我们可在电荷系统内任取一点 C，以它为基准来描述这刚体的平动和转动．我们的目的是导出这系统在外场中的任意位置上的势能．为书写简单，设 C 点处在坐标原点上．把外电势 $\varphi_{外}(\boldsymbol{r})$ 在原点附近作泰勒展开，有

$$\varphi_{外}(\boldsymbol{r}) = \varphi_{外}(0) + \boldsymbol{r}\cdot(\nabla\varphi_{外})_0 + (1/2)\boldsymbol{rr} : (\nabla\nabla\varphi_{外})_0 + \cdots, \tag{2.4.7}$$

代入势能表达式(2.4.5)，并利用各级电矩的定义，则得到

$$\begin{aligned} U &= Q\varphi_{外}(0) + \boldsymbol{p}\cdot(\nabla\varphi_{外})_0 + (1/2)\overleftrightarrow{\mathscr{D}} : (\nabla\nabla\varphi_{外})_c + \cdots \\ &= Q\varphi_{外}(0) + \boldsymbol{p}\cdot(\nabla\varphi_{外})_0 + (1/6)\overleftrightarrow{\boldsymbol{D}} : (\nabla\nabla\varphi_{外})_c + \cdots. \end{aligned} \tag{2.4.8}$$

导出后一等式时利用了外电场的源不在所考虑的区域内，因而

$$\overleftrightarrow{I} : (\nabla\nabla\varphi_{外})_0 = (\nabla^2\varphi_{外})_0 = 0, \tag{2.4.9}$$

并由此导致

$$3\overleftrightarrow{\mathscr{D}} : (\nabla\nabla\varphi_{外})_0 = \overleftrightarrow{\boldsymbol{D}} : (\nabla\nabla\varphi_{外})_0. \tag{2.4.10}$$

从(2.4.8)式看到，分布电荷系统在外电场中的势能可分解成它的各级矩的势能之和．

让我们对这结果作些进一步的说明．(2.4.8)式的第一项是电量为 Q 的点电荷的势能，它取决于系统基准点所在位置上的电势．第二项是矩为 p 的偶极子的势能，这势能可写成

$$U = -\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}_{外} \tag{2.4.11}$$

它依赖于基准点所在位置上的电场强度，也依赖于偶极矩以外电场的相对方向．第三项是矩为 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{D}}$ 的四极子的势能，这势能可化成

$$U = -\frac{1}{6}\overleftrightarrow{\boldsymbol{D}} : \nabla\boldsymbol{E}_{外}. \tag{2.4.12}$$

它与外电场的变率有关．因此，四极子在均匀电场中的势能是零．若电场为缓变，即电荷区内电场的差异 $\Delta\boldsymbol{E}$ 远小于该地的电场强度 $\boldsymbol{E}$，则四极子的势能远小于偶极子的势能．这样我们才能用点

电荷和偶极子的势能来代表整个系统的势能. 微观粒子的尺度很小,外电场在这范围内缓变的条件常能成立,因此上述势能展开常被用于外场中的微观系统.

中性原子或分子的总电量为零,它在外电场中的势能可用偶极子的势能来代表. 若它的内部运动状态不变,它就是一个刚性的偶极子. 它只能像刚体一样地做平动或转动. 偶极子的外场势能已由(2.4.11)表出. 这里借助它来导出偶极子在外场中所受的力和力矩.

按照力学中的虚功原理,偶极子受到的外力等于它做单位虚位移(平动)时的势能变化,即

$$\boldsymbol{F} = -\nabla U = \nabla(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{E}_{外}). \tag{2.4.14}$$

平动时偶极矩矢量不改变. 利用附录中式(A1.8),并注意到 $\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$,上式化作

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{p} \cdot \nabla \boldsymbol{E}_{外}. \tag{2.4.15}$$

由此可见,在均匀电场中偶极子将不受外电场力,但外电场对偶极子一般有力矩. 同样按照虚功原理,它受到的力矩等于单位虚转动时的势能变化. 若以该处 $\boldsymbol{E}$ 的方向为准,偶极矩与它的夹角为 θ,则势能可写成

$$U = -pE\cos\theta. \tag{2.4.16}$$

因此力矩的大小为

$$N = -\frac{\partial U}{\partial \theta} = -pE\sin\theta. \tag{2.4.17}$$

用矢量形式写为

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}_{外}. \tag{2.8.11}$$

除非 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 平行,不管电场均匀与否,力矩总是存在的.

上面限于讨论刚性的电荷系统,因为只有这样,(2.4.2)式右边第二项才保持不变. 如果系统内电荷的分布有变化,则必须考虑其中第二项的变化对能量守恒的影响. 它相当于计及电荷系统的自作用势能. 对第二项作类似于(2.4.3)式的处理,相应可导出

自作用势能的表达式

$$U_{自} = \frac{1}{2}\iiint \rho\,\varphi\,\mathrm{d}\tau, \qquad (2.4.13)$$

式中的 φ 是系统自场的电势. 对于非刚性分布的电荷系统，在计及自作用势能后，我们依然可以把(2.4.5)式作为它在外电场中的势能，它的总势能是两者之和.

2.5 静电边值问题的唯一性定理

用库仑定律来求电场，要求全空间有关的电荷分布都已知. 如果我们要求解一个有有限边界的区域 V 内的电场，且也只知道 V 内的电荷分布，那么就需要利用静电场的泊松方程. 本节将证明，为确定 V 内的电场，必须再在区域边界上附加一定的边条件，泊松方程才会有唯一解. 因此这样的问题叫静电边值问题. 下面讨论须附加什么边界条件，V 内的电场才会唯一地确定.

我们把结果表述成一系列的定理.

定理 1(第一类边值问题)：若在有有限边界的区域 V 内有几种均匀的绝缘介质，V 内的自由电荷分布为已知，那么当 V 的边界面 S 上的电势 φ 也已知时，静电场方程有唯一确定的解.

定理 2(第二类边值问题)：若在有有限边界的区域 V 内具有与定理 1 同样的前提，而 V 的边界面 S 上电势的法向变率 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$(即电场强度的法向分量)也已知，则静电场方程有唯一确定的解.

我们先就 V 内只有一种介质的情形来证明，然后再把它推广到多种介质的情形. 为避免重复，这两条定理一并证明如下.

设在同样条件下得到了两个解 φ_1 和 φ_2，则它们都满足

$$\nabla^2\varphi = -\rho/\varepsilon, \qquad (2.5.1)$$

$$\left.\varphi\right|_S = 已知函数 \qquad (按定理 1 的要求)，或$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S = 已知函数 \qquad (按定理 2 的要求). \qquad (2.5.2)$$

为证明它们只能是同一个解，引入 $\Phi=\varphi_2-\varphi_1$. 由 φ_1 和 φ_2 满足同样的方程和边条件，推知这 Φ 必满足

$$\nabla^2\Phi = 0, \tag{2.5.3}$$

$$\left.\Phi\right|_S = 0 \quad \text{（按定理 1 的要求），或}$$
$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_S = 0 \quad \text{（按定理 2 的要求）.} \tag{2.5.4}$$

现在需要证明，满足(2.5.3)和(2.5.4)式的 Φ 只能是一个常数.

为此引入数学公式

$$\nabla\cdot(\Psi\,\nabla\Phi) = \Psi\,\nabla^2\Phi + \nabla\Psi\cdot\nabla\Phi. \tag{2.5.5}$$

把等式两边对 V 作体积分，并把全散度的体积分化成边界上的面积分，得到

$$\oiint \Psi\,\nabla\Phi\cdot d\sigma = \iiint \Psi\,\nabla^2\Phi\, d\tau + \iiint \nabla\Psi\cdot\nabla\Phi\, d\tau. \tag{2.5.6}$$

这里的 Ψ 和 Φ 都可以是任意函数，因为它只是一个数学公式，而没有涉及物理规律. 用它证明上述定理时，我们令 Φ 就是上面的 $\varphi_1-\varphi_2$，以及 $\Psi=\Phi$. 由 Φ 满足方程(2.5.3)知，(2.5.6)式右边第一项为零. 这样，该式可重写成

$$\oiint \Phi\,\nabla\Phi\cdot d\sigma = \iiint |\nabla\Phi|^2 d\tau. \tag{2.5.7}$$

考虑到 Φ 满足边界条件(2.5.4)，不管对第一或第二类边值问题，上式左边都将是零，而右边的被积函数是非负的. 这样就推知 $\nabla\Phi$ 须处处为零，即 Φ 只能是常数. 由于电势的叠加常数没有物理意义，这样就证明了 φ_1 和 φ_2 在物理上是同一个解.

然后设 V 内有两种均匀介质 1 和 2，如图 2.4 所示. 上述定理可类似地证明.

仍令 Φ 为两个可能解之差，但把 ψ 定义为

$$\psi = \begin{cases} \varepsilon_1\Phi, & \text{在 } V1 \text{ 区}, \\ \varepsilon_2\Phi, & \text{在 } V2 \text{ 区}. \end{cases} \tag{2.5.8}$$

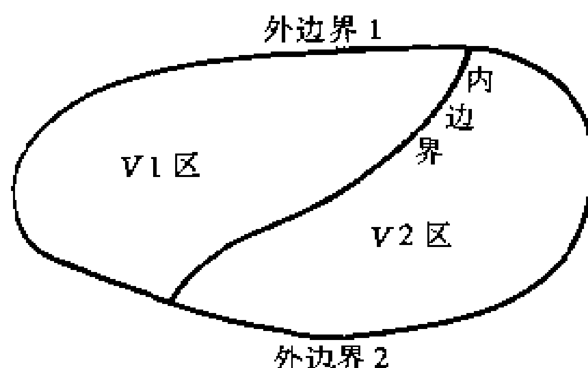


图 2.4　两种介质的外边界和内边界

把数学公式(2.5.6)分别用于介质 1 区(记为 $V1$ 区)和介质 2 区(记为 $V2$ 区),相应可写出两个等式,

$$\iint_{(外1)} \varepsilon_1 \Phi \nabla\Phi \cdot d\boldsymbol{\sigma} + \iint_{(内)} \varepsilon_1 \Phi \nabla\Phi \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \iiint_{(V1)} \varepsilon_1 |\nabla\Phi|^2 d\tau, \tag{2.5.9}$$

$$\iint_{(外2)} \varepsilon_2 \Phi \nabla\Phi \cdot d\boldsymbol{\sigma} + \iint_{(内)} \varepsilon_2 \Phi \nabla\Phi \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \iiint_{(V2)} \varepsilon_2 |\nabla\Phi|^2 d\tau, \tag{2.5.10}$$

这里已利用了 $\nabla^2\Phi=0$,并把边界分成了外边界和内边界两部分.前面已论述,在介质外界面上的积分为零.需要重新考虑的仅是两种介质的公共界面上的积分.

在介质的界面上,φ_1 和 φ_2 都须满足边界连接条件(2.1.5),因此 Φ 作为两个解之差,它必满足

$$\varepsilon_1 \frac{\partial\Phi}{\partial n_1} + \varepsilon_2 \frac{\partial\Phi}{\partial n_2} = 0. \tag{2.5.11}$$

把(2.5.9)和(2.5.10)式的两边分别相加,得到

$$\iiint_{(V1)} \varepsilon_1 |\nabla\Phi|^2 d\tau + \iiint_{(V2)} \varepsilon_2 |\nabla\Phi|^2 d\tau = \oint\!\!\!\oint \Phi\left(\varepsilon_1 \frac{\partial\Phi}{\partial n_1} + \varepsilon_2 \frac{\partial\Phi}{\partial n_2}\right) d\sigma = 0. \tag{2.5.12}$$

这同样意味着 $\nabla\Phi$ 须在整个区域内处处为零,即 φ_1 和 φ_2 只能是

同一个解. 显然,这证明的精神对有两种以上介质存在时是一样适用的.

上面讨论的是区域内只有绝缘介质的情形. 当这区域内有导体存在,情况有所不同. 因为我们知道,导体表面的电荷分布与导体外的电场是相互依赖的,因而是无法事先已知的. 在这情况下,须对导体附加什么条件,区域内的电场分布才唯一地被确定?我们也把相应的结论表述为两条唯一性定理.

定理 3:区域 V 内有导体. 设除导体外,V 内电荷分布为已知,V 的外表面有已知的第一或第二类边条件. 此外若导体表面的电势为已知,则区域 V 内的电势分布有唯一解.

定理 4:设在导体之外有与定理 3 同样的前提. 此外导体所带的总电量为已知,则区域 V 内的电势分布也有唯一解.

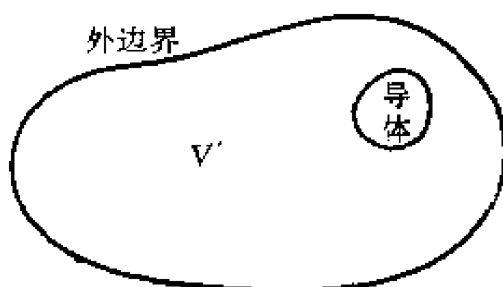


图 2.5　区域 V 内有导体

我们以定理 1 和定理 2 为基础来证明这两条定理. 把扣除导体后的区域记作 V',则 V' 内只有绝缘介质(图 2.5). 按定理 1 和 2,定理 3 的成立是自明的. 为证明定理 4,我们把导体上电量已知的条件通过场强来表示,即

$$\oint\!\!\!\oint \nabla\varphi \cdot \mathrm{d}\sigma = -Q_{导}/\varepsilon = 已知. \qquad (2.5.13)$$

若有两个解 φ_1 和 φ_2 都满足(2.5.13),则两解之差 $\Phi=\varphi_1-\varphi_2$ 必满足

$$\oint\!\!\!\oint \nabla\Phi \cdot \mathrm{d}\sigma = 0, \qquad (2.5.14)$$

再考虑到导体的等势性,便有

$$\oiint \Phi \nabla\Phi \cdot \mathrm{d}\sigma = 0, \tag{2.5.15}$$

有了(2.5.15),再对 V' 区运用与前面完全一样的论证,我们将得到结论:V 内 $\nabla\Phi$ 必处处为零. 这就证完了定理 4.

最后值得指出一点. 从唯一性定理看,当我们求解有限或半无限区的静电场时,区域外的电荷分布不必知道. 客观上,外部若有电荷,它对内部电场必是有影响的. 唯一性定理实质上告诉我们,外部是否有电荷以及它对区域内的电场的影响是可以通过边条件来体现的. 外边界上电势或法向电场分量的任意性正是外部电荷的任意性的反映.

2.6 静电镜像法

镜像法是求解静电边值问题的一种方法. 让我们通过例子来说明用这种方法处理边值问题的精神.

例 1 设有一个无限大的平面导体,距平面为 a 处有一个点电荷 q,试求它所引起的电势分布.

首先把坐标取成如图 2.6 所示. 导体面为 $x=0$ 平面,电荷在 $(x,y,z)=(a,0,0)$ 处. 电荷 q 的存在必使导体面上产生感应电荷. 整个电场应是由这两部分电荷共同产生的.

静电问题中的导体是等势体. 由于它延伸到无穷远,所以导体面与无穷远处的电势相等,我们把它定义为零. 这样,问题的数学表述是:求解电势分布函数 $\varphi(x,y,z)$,它满足

$$\nabla^2 \varphi = \begin{cases} -(q/\varepsilon)\delta(x-a)\delta(y)\delta(z), & \text{当 } x>0; \\ 0, & \text{当 } x<0, \end{cases} \tag{2.6.1}$$

$$\varphi(x=0) = 0, \quad \varphi(r\to\infty) = 0. \tag{2.6.2}$$

这数学问题的解是唯一的. 它就是物理上想知道的电势分布.

正因有唯一性定理保证,我们不管用什么方法找出一个函数,

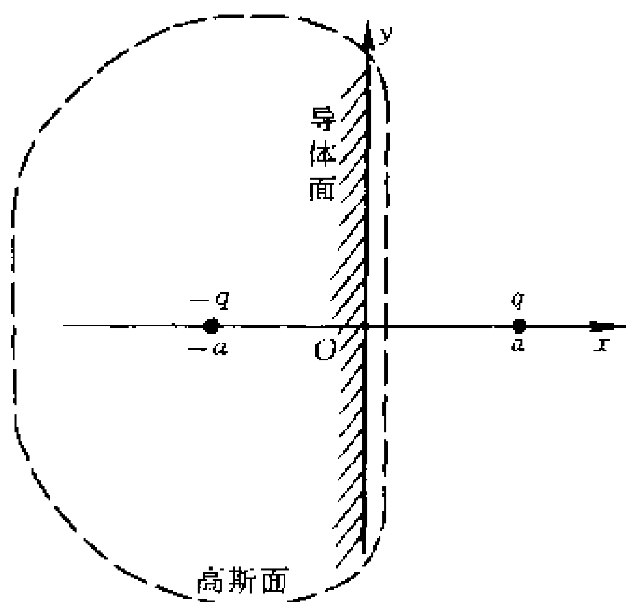


图 2.6　大导体平面上的镜像电荷

只要它满足(2.6.1)和(2.6.2)，它就是问题所要的解．对于左半空间，显然 $\varphi=0$ 是解．它表明左半空间不会有电场．我们集中考虑右半空间．

设想在 $(x,y,z)=(-a,0,0)$ 处有一假想的点电荷 $-q$．它与问题中的真实电荷一起，在右半空间所产生的电势将既满足方程(2.6.1)，也满足边条件(2.6.2)．这意味着此假想电荷在右半空间的电场与导体上感应电荷产生的电场应一样．这是由唯一性定理保证的．按这样的分析，立即可写出右半空间的电势分布，

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\epsilon}\left(\frac{q}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}}+\frac{-q}{\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}}\right). \tag{2.6.3}$$

在找到电势分布后，其他有关的情况也跟着确定了．若感兴趣于电场强度的分布，可直接用梯度运算得到，

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi=\frac{q}{4\pi\epsilon}\left(\frac{\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}-a\boldsymbol{e}_x)}{(x-a)^2+y^2+z^2}-\frac{\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}+a\boldsymbol{e}_x)}{(x+a)^2+y^2+z^2}\right). \tag{2.6.4}$$

当想知道导体面上的电荷分布，可利用边界关系，由电场强度的 x

分量算出,其上的自由电荷面密度为

$$\Sigma(x=0,y,z)=\varepsilon E_x(0,y,z)=\frac{1}{2\pi}\frac{-aq}{(a^2+y^2+z^2)^{3/2}}. \tag{2.6.5}$$

从这结果看出,导体面上处处都带反号电荷,其分布是中心对称的,面密度随距离的增大而减小. 这些结果都是意料之中的. 让我们考虑一下导体上的总电量,通过直接积分可算出这总电量为 $-q$,它与假想电荷的电量一样. 从高斯定理看,这结果也并不偶然. 作一个把导体和整个左半空间包在内的高斯面(图 2.6). 注意到假想电荷和导体面上的电荷在右半空间产生同样的电场,那么由高斯定理推知,导体上的总电量应与假想电荷的电量相一致. 当问题涉及这点电荷在静电场中的势能或静电力时须注意. 这只能指它在外场中的势能或电力. 在上述结果中扣除自场的贡献,即得

$$V_{外}=q\varphi_{外}(a,0,0)=-\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q^2}{2a}, \tag{2.6.6}$$

$$\boldsymbol{F}_{外}=q\boldsymbol{E}_{外}(a,0,0)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q^2}{4a^2}\boldsymbol{e}_x, \tag{2.6.7}$$

式中的 a 指电荷与导体板的距离. 这势能和电力与电荷的 y 和 z 坐标都无关.

这是用镜像法处理静电边值问题的典型例子. 在这例子中,若把导体看成镜子,假想电荷正处在真电荷的镜像位置上. 因此这假想电荷被称为像电荷,这处理方法被称为静电镜像法. 这方法的要点是在所考虑的区域之外安放一个或一些像电荷,以使它们与问题中的真电荷一起,让所有的边条件得以满足. 像电荷必须放在区域之外,是为了保证区域内的泊松方程不致被破坏. 这样按唯一性定理,区域外像电荷和区域内真电荷联合产生的电势就是问题所要的解答. 注意一点,像电荷的位置并不一定与光学的镜像相合,镜像法仅是一个名称.

下面再讨论导体边界为球面状的情形.

例 2 有一半径为 R 的接地导体球，距球心 $b>R$ 处有一点电荷 q，求导体外的电势分布.

当用镜像法处理时，我们只能把假想的像电荷安放在导体边界之内. 这样，导体外的泊松方程和无穷远边条件必被满足. 因此需要考虑的是使它与真电荷一起在导体表面产生零电势. 出于对称的考虑，只能把像电荷安置在对称轴上，如图 2.7 所示. 设它距球心为 a，电量为 q'. 我们应当用导体表面的零电势条件来定出的 a 和 q'.

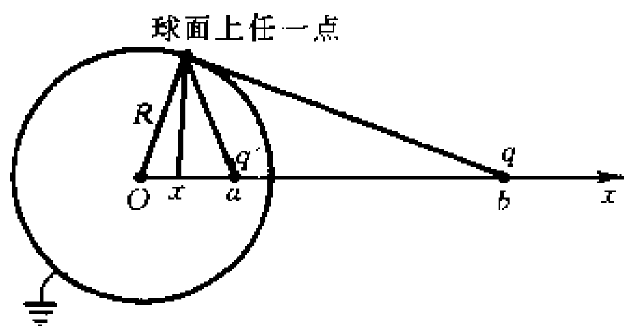


图 2.7 导体球面上的镜像电荷

为此先把 a 和 q' 当参量，写出这像电荷及真电荷在导体球表面产生的电势

$$\varphi(R)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{q}{\sqrt{R^2+b^2-2bx}}+\frac{q'}{\sqrt{R^2+a^2-2ax}}\right)$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{q}{\sqrt{2b\left(\frac{R^2+b^2}{2b}-x\right)}}+\frac{q'}{\sqrt{2a\left(\frac{R^2+a^2}{2a}-x\right)}}\right),\tag{2.6.8}$$

式中用 x 代表球面上的不同位置. 我们需要 $\varphi(R)$ 对任何 $x(<R)$ 都为零. 从上式右边看出，它要求满足两个条件，

$$\frac{R^2+b^2}{b}=\frac{R^2+a^2}{a},\tag{2.6.9}$$

$$\frac{q}{\sqrt{b}}=-\frac{q'}{\sqrt{a}},\tag{2.6.10}$$

这两个条件足以把像电荷的电量和位置确定了. 结果是

$$a = R^2/b, \tag{2.6.11}$$

$$q' = -qR/b. \tag{2.6.12}$$

这样,写出 q 与 q' 在球外产生的电势

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-b)^2+y^2+z^2}} - \frac{R/b}{\sqrt{(x-R^2/b)^2+y^2+z^2}}\right). \tag{2.6.13}$$

按唯一性定理,它就是问题所要的结果.

如果需要,由此也可推出其他有关的量. 这里只考虑一下这接地导体上的总电量. 在导体表面外作一个高斯面,按与上例同样的分析,这情况下导体的电量也必与像电荷的电量相等,即它是 $-qR/b$. 显然若先求出导体表面的电荷分布,再用积分求总电量,其结果是一样的.

例 3 同上问题中,若导体不接地,但(a)导体表面电势 φ_0 为已知,或(b)导体上的总电量 Q 为已知,试求出导体外的电势分布.

让我们用镜像法做出情况(a)下的解.

首先注意,电势的零点仍定在无穷远处,因此问题中的 φ_0 是指导体表面与无穷远处的电势差. 为处理本问题,我们再一次利用静电场的叠加原理. 上例中的像电荷 q' 与真电荷一起,已使导体表面和无穷远处的电势均为零. 现在可设法再在球面之内加一个假想电荷 q'',它在无穷远处必保持零电势. 因此对它的要求是在导体表面上产生电势 φ_0. 这效果很容易达到,为此只须在中心处加一个 $q''=R\varphi_0$ 的点电荷即可. 这样,两个像电荷和真电荷在导体外所产生的电势既满足区域内的泊松方程,也满足了全部的边条件. 唯一性定理保证,它就是所要的解. 相应地写出结果是

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon}\left(\frac{q}{\sqrt{(x-b)^2+y^2+z^2}} - \frac{qR/b}{\sqrt{(x-R^2/b)^2+y^2+z^2}} + \frac{R\varphi_0}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right). \tag{2.6.14}$$

对于情况(b)，显然可以用很类似的方法求解，这里不再写出，建议读者当练习来做.

由这些例子看出，静电镜像法是唯一性定理的一个巧妙的应用. 凑出一个既满足泊松方程，又满足一切边条件的解，它必就是问题所要的答案. 显然这方法有很大的局限性. 它不仅需要边界形状很简单，而且需要边条件也很简单才行.

2.7 特解叠加法

2.5 节中已指出，静电边值问题在数学上是求满足下列方程和边条件的解：

$$\nabla^2 \varphi = - \rho / \varepsilon, \tag{2.7.1}$$

$$\varphi \Big|_S = \text{已知}, \quad \text{或} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_S = \text{已知}. \tag{2.7.2}$$

当方程(2.7.1)的右边为零，则问题是拉普拉斯方程的边值问题. 我们将先论证，泊松方程的边值问题原则上总能化成拉普拉斯方程的边值问题. 然后本节讨论拉普拉斯方程边值问题的一种解法，即特解叠加法.

我们找出方程(2.7.1)的一个特解，例如其库仑解

$$\varphi_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \mathrm{d}\tau' \tag{2.7.3}$$

一般说来，它不满足边条件(2.7.2)，因此不是问题所要的解. 设 φ 是上述泊松方程边值问题的解，我们引入

$$\Phi = \varphi - \varphi_C. \tag{2.7.4}$$

由于 φ 和 φ_C 都满足(2.7.1)，因此 Φ 必定满足方程

$$\nabla^2 \Phi = 0. \tag{2.7.5}$$

在所考虑区域的边界上，Φ 的边条件是

$$\Phi \Big|_S = \varphi \Big|_S - \varphi_C \Big|_S = \text{已知},$$

$$\text{或}\quad \left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_S=\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S-\left.\frac{\partial\varphi_c}{\partial n}\right|_S=\text{已知}. \tag{2.7.6}$$

这样就把问题转化成了拉普拉斯方程的第一或第二类边值问题. 当 Φ 已解出,则原问题的解也就得到了. 下面我们用特解叠加法来求解拉普拉斯方程的边值问题.

当采用球坐标,拉普拉斯方程有形式

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}=0. \tag{2.7.7}$$

为便于说明处理的精神,下面将只讨论轴对称的问题. 这时物理量都与 φ 角无关,方程简化为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)=0. \tag{2.7.8}$$

从数学知道,这方程可用分离变数法求出两系列的特解,它们是

$$\Phi(r,\theta)=r^l\mathrm{P}_l(\cos\theta),\qquad l=0,1,2,\cdots, \tag{2.7.9}$$

$$\Phi(r,\theta)=r^{-(l+1)}\mathrm{P}_l(\cos\theta),\quad l=0,1,2,\cdots, \tag{2.7.10}$$

式中的 $\mathrm{P}_l(\cos\theta)$ 是勒让德多项式. 最低的几级勒让德多项式很常用,它们是

$$\begin{cases}\mathrm{P}_0(\cos\theta)=1,\\ \mathrm{P}_1(\cos\theta)=\cos\theta,\\ \mathrm{P}_2(\cos\theta)=\dfrac{3}{2}\cos^2\theta-\dfrac{1}{2}.\end{cases} \tag{2.7.11}$$

各级勒让德多项式满足正交归一条件

$$\int_{-1}^{+1}\mathrm{P}_m(\cos\theta)\mathrm{P}_n(\cos\theta)\mathrm{d}\cos\theta=\frac{1}{2n+1}\delta_{mn}. \tag{2.7.12}$$

对于拉普拉斯方程,其特解的线性组合仍满足原方程. 更重要的是特解(2.7.9)及(2.7.10)构成了完备系列. 所谓完备性指拉普拉斯方程的任一轴对称解必可表成这两个系列解的线性组合. 这样,我们所要的解必可写成

$$\Phi(r,\theta) = \sum_l \left[A_l r^l \mathrm{P}_l(\cos\theta) + B_l r^{-(l+1)} \mathrm{P}_l(\cos\theta)\right]$$

(2.7.13)

的形式.若能利用边条件把其中的组合系数 A_l 及 B_l 确定下来，则边值问题就解决了.

为了简单，设所考虑区域的边界是球面，则相应的边条件写成

$$\Phi(R,\theta) = f(\theta). \quad (2.7.14)$$

把(2.7.13)用于边界上，得

$$f(\theta) = \sum_l \left[A_l R^l \mathrm{P}_l(\cos\theta) + B_l R^{-(l+1)} \mathrm{P}_l(\cos\theta)\right].$$

(2.7.15)

由勒让德多项式的正交归一条件给出，

$$A_l R^l + B_l R^{-(l+1)} = (2l+1)\int_{-1}^{+1} f(\theta)\mathrm{P}_l(\cos\theta)\mathrm{d}\cos\theta,$$

$$l = 0,1,2,\cdots, \quad (2.7.16)$$

我们看到，球面上的边条件还没有把组合系数完全确定. 这里引申出一个值得注意的问题.

若考虑的是球面外的区域，除球面边条件之外，还必须有无穷远边条件. 下面将用例子来说明，再利用无穷远条件，组合系数将完全确定. 问题在于对球面内的问题怎么办？对径向坐标 r 讲，球内区域的“边界”是 $r=0$ 和 $r=R$. 因此为使解完全确定，我们还必须写出 $r=0$ 处的物理条件. 注意这并不是一个新的物理要求. 它实际上是由区域内的电荷分布决定的. 如果在 $r=0$ 附近没有电荷，或只有连续分布的电荷，则有

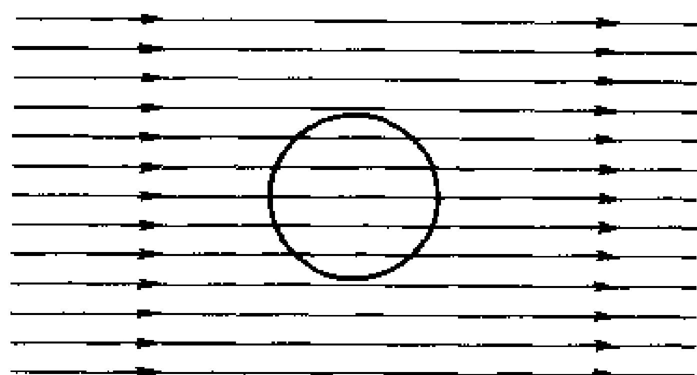
$$\varphi(0) = \text{有限}. \quad (2.7.17)$$

若中心有一个点电荷，则电势分布应满足

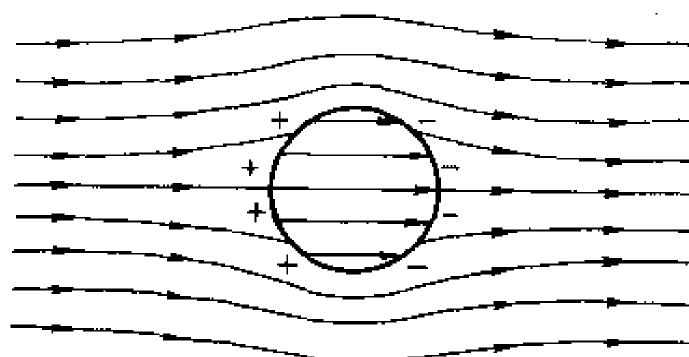
$$\varphi(r \to 0) \propto \frac{1}{r}. \quad (2.7.18)$$

下面的例子将使我们看到，利用问题的已知情况而写出 $r=0$ 处的附加条件后，系数 A_l 和 B_l 也完全确定了. 它就是问题所要的解.

下面举一个例子：无穷大均匀介质中原有一个 z 方向的均匀电场 $\boldsymbol{E}_0$. 若在某处挖出一个半径为 R 的球形空穴(图 2.8(a))，求变化后的静电场.



(a)准备挖去的空穴



(b)挖去之后

图 2.8　空穴对均匀场的影响

在挖出空穴后，令空穴外的电势为 φ_1，空穴内的电势为 φ_2. 因问题中没有自由电荷，所以电势处处都满足拉普拉斯方程. 把坐标原点取在空穴中心，有

$$\nabla^2\varphi_1 = 0,\quad \text{当 } r > R, \tag{2.7.19}$$

$$\nabla^2\varphi_2 = 0,\quad \text{当 } r < R. \tag{2.7.20}$$

在空穴的边界上，φ_1 与 φ_2 须满足连接条件

$$\varphi_1 = \varphi_2,\qquad r = R; \tag{2.7.21}$$

$$\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} = \varepsilon_0\frac{\partial\varphi_2}{\partial r},\qquad r = R. \tag{2.7.22}$$

这问题的外边界在无穷远处，为此须写出无穷远边条件. 考虑到

空穴的影响在无穷远处应已消失，所以有

$$\nabla\varphi_1\Big|_{\infty} = -\boldsymbol{E}_0, \qquad (2.7.23)$$

或采用第一类边条件的形式，写作

$$\varphi_1\Big|_{\infty} = -E_0 z. \qquad (2.7.24)$$

由此看到在本问题中，无穷远处的电势不能定义为零. 此外，上面已指出，为定出球内解需用到 $r=0$ 处的物理条件. 本问题的空穴中心没有电荷存在，所以 $r=0$ 处有

$$\varphi(0) = \text{有限}. \qquad (2.7.25)$$

这样，我们的物理问题就表述成了一个完整的拉普拉斯边值问题. 下面用特解叠加法来求解.

先把解的球外和球内部分分别写成

$$\varphi_1 = \sum_l (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) \mathrm{P}_l(\cos\theta), \qquad (2.7.26)$$

$$\varphi_2 = \sum_l (C_l r^l + D_l r^{-(l+1)}) \mathrm{P}_l(\cos\theta). \qquad (2.7.27)$$

然后用边条件来确定式中的组合系数 A_l, B_l, C_l 和 D_l.

先用 $r=0$ 和 $r\to\infty$ 的边条件是有利的. 把无穷远边条件用于球外解 φ_1，看出在所有的 A_l 中只有 $A_1\neq 0$，且它等于 $-E_0$. 把 $r=0$ 处的附加条件用于球内解 φ_2，看出所有的 D_l 都为零. 这样，解式 (2.7.26)和(2.7.27)简化为

$$\varphi_1 = -E_0 r\cos\theta + \sum_l B_l r^{-(l+1)} \mathrm{P}_l(\cos\theta), \qquad (2.7.28)$$

$$\varphi_2 = \sum_l C_l r^l \mathrm{P}_l(\cos\theta), \qquad (2.7.29)$$

其中待定系数 B_l 和 C_l 应当用空穴界面上的连接条件定出.

要求(2.7.28)和(2.7.29)满足球面边界连接条件(2.7.21)和(2.7.22)，得到

$$-E_0 R\cos\theta + \sum_l B_l R^{-(l+1)} \mathrm{P}_l(\cos\theta) = \sum_l C_l \mathrm{P}_l(\cos\theta). \qquad (2.7.30)$$

$$-\varepsilon_1\Big[E_0\cos\theta+\sum_l(l+1)B_lR^{-(l+2)}\mathrm{P}_l(\cos\theta)\Big]$$

$$=\varepsilon_0\sum_l lC_lR^{l-1}\mathrm{P}_l(\cos\theta). \tag{2.7.31}$$

因为不同级的勒让德多项式是正交的，所以这两个式子实际上包含着两系列等式. 任取一个 n ，在上式两边同乘 $\mathrm{P}_n(\cos\theta)$，并对 $\cos\theta$ 积分，我们就得到了两串等式. 对 $n=0$ 或 $n\geqslant 2$，相应的式子是

$$B_nR^{-(n-1)}=C_nR^n, \tag{2.7.32}$$

$$\varepsilon_1(n+1)B_nR^{-(n+2)}=\varepsilon_0 nC_nR^{n-1}. \tag{2.7.33}$$

作为 B_n 和 C_n 的代数方程组，它只有零解. $n=1$ 所相应的式子是

$$-E_0R+B_1R^{-2}=C_1R, \tag{2.7.34}$$

$$-\varepsilon_1(E_0+2B_1R^{-3})=\varepsilon_0C_1. \tag{2.7.35}$$

从它们可定出两个非零的系数 B_1 和 C_1，

$$B_1=-\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_0}{2\varepsilon_1+\varepsilon_0}E_0R^3, \tag{2.7.36}$$

$$C_1=-\frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1+\varepsilon_0}E_0. \tag{2.7.37}$$

当系数全部定出后，问题的解就完全确定了. 为了清楚起见，把它们写成

$$\varphi_1=-E_0z+\frac{B_1\cos\theta}{r^2}, \tag{2.7.38}$$

$$\varphi_2=C_1z. \tag{2.7.39}$$

其中 B_1 和 C_1 已在上面给出. 让我们对这个解建立一个物理的理解.

(2.7.39)表明空穴内的电场仍是均匀场，方向与原场一致. 场强大小为

$$E_{内}=-c=\frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1+\varepsilon_0}E_0. \tag{2.7.40}$$

注意介质的介电常数 $\varepsilon_1>\varepsilon_0$，所以空穴内的电场是增强了. 这是空

穴表面的束缚电荷产生了附加场强的后果. 从(2.7.38)看出,空穴外的电场是在原场上叠加了一个偶极场. 这说明挖去一块球形介质后,表面束缚电荷对外部的影响相当于一个位于中心的偶极子,其偶极矩为 $4\pi\varepsilon_0 B_1 \boldsymbol{e}_z$. $B_1<0$ 表示其方向与原场反平行. 图 2.8(b)中画出了空穴内外的电力线的分布.

最后对本问题中的无穷远边条件作些说明. 由计算结果看到,远处附加偶极场与原场的场强比是$(R/r)^3$ 的量级. 当空穴很小,例如 $R=1$ cm. 那么空穴在 10 cm 远处的影响已仅是原场的 10^{-3}. 若这么大的影响已在感兴趣的程度之外而可忽略不计,那么在10 cm远处就已只有原场了. 这就是上面写出无穷远边条件(2.7.23)的道理. 从这例子看到,物理上所谓"存在一个无穷大的均匀场",实际仅指在本问题有关的范围内的电场是均匀的. 它可能只是一个很小的范围. 写无穷远边条件就是要表达不受本问题影响的地方的物理情况. 一般说来,若远处没有与本问题有关的已知场,我们才能把无穷远处的电势定义为零.

第3章 静磁问题

3.1 磁场的矢势

按介质中的麦克斯韦理论,静磁场满足的微分方程为

$$\nabla\cdot \boldsymbol{B} = 0, \tag{3.1.1}$$

$$\nabla\times \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{j}, \tag{3.1.2}$$

其中的传导电流 $\boldsymbol{j}$ 应满足

$$\nabla\cdot \boldsymbol{j} = 0. \tag{3.1.3}$$

由于静磁规律的数学形式与静电场不同,所以在处理方法上也有所不同.

对于静磁问题,一般不能引入磁标势 φ_m,因为磁场在有源电流的地方是有旋的. 磁场的重要特征是它的无散性. 数学告诉我们,无散场总能表成另一个矢量场的旋度. 为此引入矢量场$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$,使磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 满足

$$\boldsymbol{B} = \nabla\times \boldsymbol{A}. \tag{3.1.4}$$

这 $\boldsymbol{A}$ 场被称为静磁场的矢量势,简称磁矢势.

在讨论静电问题时我们已知道,标量势 φ 可叠加任意常数,即它有零点的不确定性. 矢量势则有更大的不确定性. 对一个磁矢势 $\boldsymbol{A}$,我们总可借助任意函数 ψ 而引入 $\boldsymbol{A}'$,即令

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\psi. \tag{3.1.5}$$

由于 $\nabla\times \boldsymbol{A}' = \nabla\times \boldsymbol{A}$,所以它们描述出同一个磁感应强度场 $\boldsymbol{B}$. (3.1.5)式称为磁矢势的规范变换. 磁感应强度在任意规范变换下保持不变.

让我们对这一性质作一些数学的补充说明. 人们常把一个无

旋场称为纵场，记作 A_l；而把一个无散场称为横场，记作 A_t. 数学上能够证明，任一矢量场总能分解为纵场与横场的叠加. 因此磁矢势也总能分成

$$A = A_l + A_t. \tag{3.1.6}$$

注意 A_l 的旋度按定义而恒等于零，因而

$$B = \nabla \times A = \nabla \times A_t. \tag{3.1.7}$$

这说明磁矢势的纵场部分是没有贡献的. 上面指出磁矢势可作任意的规范变换，它实际上反映 A 的纵场部分 A_l 可任意选择.

对 A 的纵场部分作特定的选择称为一种特定的规范. 在静磁问题中，人们常为方便而令 A 的纵场部分为零，而只保留横场. 这叫横场规范. 由横场的定义知，横场规范下的磁矢势满足

$$\nabla \cdot A = 0. \tag{3.1.8}$$

这被称为横场规范条件. 下面来导出横场规范下的磁矢势所满足的微分方程.

把 A 的定义式(3.1.4)代入方程(3.1.2)，有

$$\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A = \mu j. \tag{3.1.9}$$

当取定横场规范，上述方程简化为

$$\nabla^2 A = -\mu j, \tag{3.1.10}$$

这就是所要的方程. 与静电问题一样，它也是数学上的泊松方程. 注意这方程是在横场规范条件下得到的，所以它的解必须同时满足(3.1.8)式，它才是物理上所要的解.

对于全空间问题，传导电流 j 产生的磁矢势是

$$A = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{j(r')}{|r - r'|} \mathrm{d}\tau'. \tag{3.1.11}$$

它就是在第 1.2 节中用过的(1.2.14)式. 那里已用 $B = \nabla \times A$ 算出过磁感应强度 B，所得到的就是毕奥-萨伐尔定律

$$B = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{j(r') \times e(r - r')}{|r - r'|^2} \mathrm{d}\tau', \tag{1.2.9}$$

因此它必满足微分方程(3.1.10). 那时也指出过，这样的 A 满足

$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$. 它正是本节讲的横场规范条件. 所以(3.1.11)式就是我们所要的解. 因这解的形式与静电势的库仑解一样,所以也常被称为磁矢势的库仑解. 横场规范因此也叫库仑规范. 当传导电流的分布为已知,我们就可以用(3.1.11)式来算出它所产生的磁矢势.

3.2 圆电流圈的磁场和磁偶极子的概念

在这一节中将计算一个圆电流圈所产生的磁场,并由此引申出磁偶极子的概念.

考虑一个电流强度为 I 的圆电流圈,其半径为 a. 我们先算出它所产生的磁矢势 $\boldsymbol{A}_0$,计算采用球坐标来做. 圆电流圈被放置在 $\theta=\pi/2$的平面上,如图 3.1(a)所示.

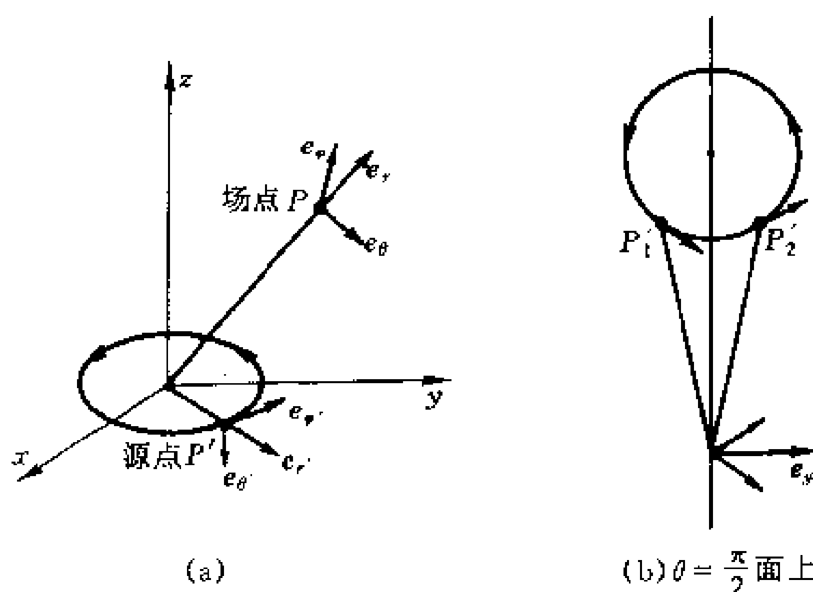


图 3.1 圆电流圈的磁矢势

为用(3.1.11)计算磁矢势,须把电流密度用数学表出. 我们用 $\boldsymbol{r}'$ 作为电流源的坐标,由于每一点的电流都在该点的 $\boldsymbol{e}_{\varphi'}$ 方向上,所以圈内的电流密度为

$$j(r') = j_{\varphi'} e_{\varphi'} = C\delta(r' - a)\delta(\theta' - \pi/2) e_{\varphi'}. \quad (3.2.1)$$

其中 $e_{\varphi'}$ 代表 r' 位置上 φ 方向的单位基矢．它不是常矢量，而是 φ' 的函数．式中的常数 C 可由电流强度 I 定出．电流强度 I 是 j 在导线截面上的积分，因此有

$$I = \iint j(r') \cdot d\sigma'$$

$$= C\int_0^{\infty} \delta(r' - a) r' dr' \int_0^{\pi} \delta(\theta' - \pi/2) d\theta' = Ca. \quad (3.2.2)$$

由此定出 $C = I/a$，即有

$$j(r') = (I/a)\delta(r' - a)\delta(\theta' - \pi/2) e_{\varphi'}. \quad (3.2.3)$$

然后来计算它产生的磁矢势．把(3.2.3)代入(3.1.11)得

$$A(r) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{j(r')}{|r - r'|} d\tau' = \frac{\mu I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e_{\varphi'} d\varphi'}{|r - a e_{r'}|}. \quad (3.2.4)$$

从系统的对称性可论证，对任一坐标为(r, θ, φ)的场点 P，磁矢势只能在 P 点的 e_{φ} 方向上，即

$$A = A_{\varphi} e_{\varphi}. \quad (3.2.5)$$

图 3.1(b)画出了 $\theta = \pi/2$ 平面上的一个场点 P．对于 P，电流圈上的任一 P_1' 点必有一对称点 P_2'，它们与 P 有相同的距离．这样，这两点上的电流对磁矢势有相同大小的贡献，但方向不同．两者的总贡献由矢量和决定．这矢量和必在 P 点的 e_{φ} 方向上．这就说明整个圆电流圈在 P 点产生的磁矢势必在该点的 e_{φ} 方向上．显然，这论证对平面外的任一场点也是适用的．

按(3.2.4)式，磁矢势 A 的 φ 分量的大小是

$$A_{\varphi} = \frac{\mu I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e_{\varphi} \cdot e_{\varphi'}}{|r - a e_{r'}|} d\varphi'. \quad (3.2.6)$$

因为 A_{φ} 只能是 r 和 θ 的函数，而与 φ 无关，我们在 $\varphi = 0$ 处作计算．这样有

$$e_{\varphi} \cdot e_{\varphi'} = \cos\varphi' \quad (3.2.7)$$

和

$$|\boldsymbol{r} - a\boldsymbol{e}_{r'}| = (r^2 + a^2 - 2ra\sin\theta\cos\varphi')^{1/2}. \quad (3.2.8)$$

代入(3.2.6)即得

$$A_\varphi = \frac{\mu I a}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi'\mathrm{d}\varphi'}{(r^2 + a^2 - 2ra\sin\theta\cos\varphi')^{1/2}}. \quad (3.2.9)$$

式中的积分不能用初等函数积出．它可化为勒让德椭圆积分．我们宁愿保留(3.2.9)作为圆电流圈所产生的磁矢势公式．

下面讨论这电流圈在 $r \gg a$ 处的磁矢势．

把(3.2.9)式中的被积函数展开成 a/r 的幂级数，

$$\begin{aligned}(r^2 + a^2 - 2ra\sin\theta\cos\varphi')^{-1/2} &= \frac{1}{r}\left(1 - \frac{2a\sin\theta\cos\varphi'}{r} + \frac{a^2}{r^2}\right)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{r} + \frac{a\sin\theta\cos\varphi'}{r^2} + O\left(\frac{a^2}{r^3}\right). \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

$O(a^2/r^3)$表示后面各项中最大的项是 a^2/r^3 的量级．代回原式积分后，展开式的第一项没有贡献，第二项才是领头项．若把第三项起都略去，注意到

$$\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi'\mathrm{d}\varphi' = \pi, \quad (3.2.11)$$

则有

$$A_\varphi = \frac{\mu I S}{4\pi}\frac{\sin\theta}{r^2}, \quad (3.2.12)$$

其中 $S = \pi a^2$ 是圆电流圈的面积．以电流方向为准，按右手定则来规定此面积的正向 $\boldsymbol{n}$，上式可用矢量形式写成

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu}{4\pi}\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{e}_r}{r^2}, \quad (3.2.13)$$

其中

$$\boldsymbol{m} = IS\boldsymbol{n}. \quad (3.2.14)$$

这就是圆电流圈在远处所产生的磁矢势．

现在相应地来计算远处磁感应强度的分布．利用 $\boldsymbol{m}$ 是常矢量，因而有

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu}{4\pi}\ \nabla\times\left(\boldsymbol{m}\times\frac{\boldsymbol{e}_r}{r^2}\right) = \frac{\mu}{4\pi}\left[\boldsymbol{m}\left(\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{e}_r}{r^2}\right) - (\boldsymbol{m}\cdot\nabla)\frac{\boldsymbol{e}_r}{r^2}\right]. \quad (3.2.15)$$

考虑范围为远处，即不包括 $r=0$，所以有 $\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{e}_r}{r^2}=0$，上式简化为

$$\boldsymbol{B}=-\frac{\mu}{4\pi}(\boldsymbol{m}\cdot\nabla)\frac{\boldsymbol{e}_r}{r^2}. \tag{3.2.16}$$

另一方面，当 $\boldsymbol{m}$ 为常矢量，附录中的数学公式(A1.8)写作

$$\nabla\left(\boldsymbol{m}\cdot\frac{\boldsymbol{e}_r}{r^2}\right)=(\boldsymbol{m}\cdot\nabla)\frac{\boldsymbol{e}_r}{r^2}+\boldsymbol{m}\times\left(\nabla\times\frac{\boldsymbol{e}_r}{r^2}\right). \tag{3.2.17}$$

在 $r\neq 0$ 的区域内，右边第二项为零. 因此磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 可化成

$$\boldsymbol{B}=-\frac{\mu}{4\pi}\nabla\left(\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{e}_r}{r^2}\right). \tag{3.2.18}$$

这里看出，圆电流圈在远处产生的磁场是有势的. 若令 $B=-\mu\nabla\varphi_m$(即 $H=-\nabla\varphi_m$)，则

$$\varphi_m=\frac{1}{4\pi}\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{e}_r}{r^2}. \tag{3.2.19}$$

不管用(3.2.16)或(3.2.18)，通过直截了当的计算可得到

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu}{4\pi}\frac{3\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_r-\boldsymbol{m}}{r^3}. \tag{3.2.20}$$

它就是圆电流圈在远处产生的磁感应强度的近似式.

把(3.2.19)和(3.2.20)与正负电荷对在远处产生的电势和电场强度相比，我们看到这两种场的空间分布形式是一样的. 因此用(3.2.20)式描述的场被称为磁偶极场. 相应的场源就被是磁偶极子. 由(3.2.14)定义的 $\boldsymbol{m}$ 是它的磁偶极矩，或简称为磁矩. 与讨论电偶极场一样，这里也须注意，应把严格地满足(3.2.20)式的场叫磁偶极场. 因此磁偶极子是磁矩为 $\boldsymbol{m}$ 而半径 $a\to 0$ 的圆电流圈，它也是一种理想化的客体. 具有有限半径的电流圈只是近似的磁偶极子，它在远处的磁场才可近似地用磁偶极场描述.

3.3 静磁场的多极展开

考虑全部传导电流分布在半径为 r_0 的球面内的情形. 如果我

们只感兴趣于 $r \gg r_0$ 处的磁场，那么与静电场相类似，下面将证明对静磁场也可作多极展开，即

$$\text{总磁场} = \text{磁偶极场} + \text{磁四极场} + \cdots.$$

注意这里的单极场永远是零，即磁荷是不存在的.

按(3.1.11)式，这有限区域内的电流所产生的磁矢势是

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \mathrm{d}\tau'. \tag{3.3.1}$$

把 $\dfrac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$ 在 $\boldsymbol{r}'=0$ 附近作泰勒展开，

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{e}_r}{r^2} + \cdots, \tag{3.3.2}$$

代回原式得

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}_1 + \cdots, \tag{3.3.3}$$

其中

$$\boldsymbol{A}_0 = \frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{r} \iiint \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau', \tag{3.3.4}$$

$$\boldsymbol{A}_1 = \frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{r^2} \boldsymbol{e}_r \cdot \iiint \boldsymbol{r}' \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'. \tag{3.3.5}$$

这就是对静磁场作多极展开的初步形式.

首先由电流的稳定性可证明 $\boldsymbol{A}_0=0$. 稳定电流条件 $\nabla \cdot \boldsymbol{j}=0$ 表明电流线永远是封闭曲线. 这样，稳定电流可看成由许多封闭的流管构成. 在一条流管内，电流强度 I 是不变的. 把电流密度在一条细流管内作体积分，有

$$\iiint_{(\text{流管})} \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau = I \oint \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0. \tag{3.3.6}$$

因此，把电流密度对全部有电流的区域作体积分，结果将仍有

$$\iiint_{(\infty)} \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau = 0. \tag{3.3.7}$$

这样就证明了 $\boldsymbol{A}_0=0$. 这也就是说，在静磁场的多极展开中，领头的是偶极项.

让我们着重讨论第二项 $\boldsymbol{A}_1$. 为此先证明一个数学关系

$$\iiint (\boldsymbol{r}'\boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau' = 0. \tag{3.3.8}$$

附录 1(A1.29)式给出

$$\nabla' \cdot (\boldsymbol{j}\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}') = (\nabla' \cdot \boldsymbol{j})\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}' + \boldsymbol{j}\boldsymbol{r}' + \boldsymbol{r}'\boldsymbol{j}. \tag{3.3.9}$$

利用稳定电流条件,右边第一项为零. 因此有

$$\nabla' \cdot (\boldsymbol{j}\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}') = \boldsymbol{j}\boldsymbol{r}' + \boldsymbol{r}'\boldsymbol{j}. \tag{3.3.10}$$

对等式两边作全空间的体积分. 左边可用高斯定理化为无穷远处的面积分. 由于电流只存在于有限区域内,所以它恒为零. 于是(3.3.8)式得到了证明.

利用(3.3.8)式,$\boldsymbol{A}_1$ 可重写作

$$\boldsymbol{A}_1 = \frac{\mu}{4\pi}\frac{1}{2r^2}\boldsymbol{e}_r \cdot \iiint (\boldsymbol{r}'\boldsymbol{j} - \boldsymbol{j}\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'. \tag{3.3.11}$$

把矢量的双叉乘用并矢表示,有

$$\boldsymbol{e}_r \times (\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{j}) = \boldsymbol{e}_r \cdot (\boldsymbol{j}\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}'\boldsymbol{j}). \tag{3.3.12}$$

对比之下看出,$\boldsymbol{A}_1$ 又可写作

$$\boldsymbol{A}_1 = -\frac{\mu}{4\pi}\frac{1}{2r^2}\boldsymbol{e}_r \times \iiint (\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{j})\mathrm{d}\tau'. \tag{3.3.13}$$

让我们定义

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{2}\iiint \boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{j}\mathrm{d}\tau', \tag{3.3.14}$$

则 $\boldsymbol{A}_1$ 的形式化成了

$$\boldsymbol{A}_1 = \frac{\mu}{4\pi}\frac{\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{e}_r}{r^2}. \tag{3.3.15}$$

它与上节中讨论过的圆电流圈在远处的磁矢势完全一样. 因此由(3.3.14)式定义的 $\boldsymbol{m}$ 被称为这电流系统的磁矩. 这样我们导出了本节的主要结果,即磁多极展开的领头项是磁偶极场.

磁场多极展开的下一项是磁四极场. 由于它很少被用到,我们不在此讨论. 下面再对磁偶极矩的概念作些分析.

上节仅对圆电流圈定义了它的磁矩. 现在让我们看一个非圆

形的，甚至非平面的电流圈．按定义(3.3.14)，它的磁矩是

$$\boldsymbol{m}_{\text{圈}}=\frac{1}{2}\iiint \boldsymbol{r}'\times \boldsymbol{j}\mathrm{d}\tau'=\frac{I}{2}\oint \boldsymbol{r}'\times \mathrm{d}\boldsymbol{l}'. \qquad (3.3.16)$$

为此把

$$\boldsymbol{S}=\frac{1}{2}\oint \boldsymbol{r}'\times \mathrm{d}\boldsymbol{l}' \qquad (3.3.17)$$

叫做这电流圈的面积(矢量)．这样，任意电流圈的磁矩都有

$$\boldsymbol{m}=I\boldsymbol{S}. \qquad (3.3.18)$$

由(3.3.17)定义的面积与参考点的选择无关，它纯由电流圈的形状决定．对平面上的电流圈，它与普通意义上的面积相一致．

上节中已指出，任意的稳定电流系统总可分解为许多细电流圈的叠加．定义(3.3.14)表明，这系统的磁矩是一切细电流圈的磁矩的矢量和．因此，这一般的磁矩概念是圆电流圈磁矩的自然推广．

最后讨论一下微观粒子的磁矩．在1.2节中开始讨论静磁场时曾指出，作为事实，电流会产生磁场，分子或原子等微观粒子的磁矩也会产生磁场．宏观电动力学把这两重磁场源统一地用电流来描写，即把微观粒子的磁矩也看作电流的体现．人们常把这观念叫分子电流假说．尽管宏观电动力学在实践上是成功的，但是分子电流假设只是一种宏观的等效描述．人们从原子实验知道，电子在原子或分子中的运动有轨道运动和自旋两部分．当电子以确定的角动量 $\boldsymbol{L}$ 作轨道运动，由于运动周期是微观的时间尺度，因此在宏观上可看作稳定电流．理论上算出相应的磁矩 $\boldsymbol{m}$ 为

$$\boldsymbol{m}=\frac{e}{2m_e}\boldsymbol{L}, \qquad (3.3.19)$$

其中的 e/m_e 是电子的荷质比．原子光谱的分析已表明这关系是正确的．这说明电子的轨道运动确是电流的体现．另一方面，原子光谱的精细结构表明，电子的自旋也相应地产生磁矩．若把自旋看成带电球的转动，则自旋角动量 $\boldsymbol{s}$ 与相应的磁矩 $\boldsymbol{m}$ 仍应满足(3.3.19)．但实验的理论分析却表明这两者的关系是

$$m = \frac{e}{m_e} S. \tag{3.3.20}$$

这结果表明，电子的自旋并不能简单地看成荷电体的转动．但是从产生磁场或感受磁场作用讲，自旋磁矩与轨道磁矩没有区别．因此我们强调，在宏观电动力学中把磁场的源归结为电流，这仅是一种宏观的等效描述．

3.4 磁偶极子在外磁场中所受的力和力矩

上节讨论了局域分布电流在远处产生的磁场，论证了它近似地是一个磁偶场．现在讨论局域电流处在外磁场中时所受的力和力矩．下面将看到，在这问题中，它也近似地相当于一个磁偶极子．我们将导出相应的力和力矩的公式，并由此引申出磁偶极子在外磁场中的势能的概念．当研究微观粒子在外磁场中的运动时，这概念是常被用到的．

设局域电流 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ 处在外磁场 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ 中，按洛伦兹力公式，载流体所受的力为

$$\boldsymbol{F} = \iiint \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}\tau. \tag{3.4.1}$$

若电流的分布区域很小，可在电流区内任取一基准点 C，以用它标志电流区在外场中的位置(图 3.2)．我们感兴趣于 C 在任意位置上时所受的外场力．把 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ 在 C 所在位置附近作泰勒展开，

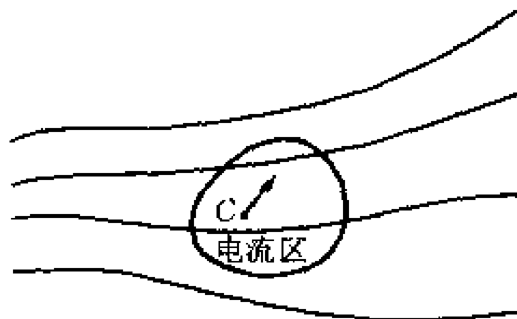


图 3.2　外磁场中的局域电流

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{B}_0+\boldsymbol{r}\cdot\nabla\boldsymbol{B}_0+\cdots, \tag{3.4.2}$$

其中 $\boldsymbol{r}$ 是从 C 出发的位矢，$\boldsymbol{B}_0$ 和 $\nabla\boldsymbol{B}_0$ 分别是 C 处的磁感应强度和强度的空间变率. 代入(3.4.1)式后，由上节证明过的(3.3.7)知，第一项

$$\iiint \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau\times\boldsymbol{B}_0=0. \tag{3.4.3}$$

这意味着若磁场为均匀，则这些电流所受的合力为零. 第二项是由磁场的不均匀带来的领头项. 当略去后面的项，合力的形式是

$$\boldsymbol{F}=\left(\iiint \boldsymbol{j}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\tau\cdot\nabla\right)\times\boldsymbol{B}_0. \tag{3.4.4}$$

利用上节证明过的(3.3.8)及矢量双叉乘公式，有

$$\iiint \boldsymbol{j}\boldsymbol{r}\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2}\iiint(\boldsymbol{j}\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}\boldsymbol{j})\mathrm{d}\tau, \tag{3.4.5}$$

$$(\boldsymbol{j}\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}\boldsymbol{j})\cdot\nabla=(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{j})\times\nabla. \tag{3.4.6}$$

于是电流所受的总外力化成

$$\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{m}\times\nabla)\times\boldsymbol{B}_0. \tag{3.4.7}$$

从这结果看出，合力仅取决于电流系统的磁矩 $\boldsymbol{m}$，而并不依赖于它的其他细节. 因此(3.4.7)式也就是磁偶极子在外磁场中的受力公式.

让我们考虑磁偶极子在外磁场中作平动的情形. 这时 $\boldsymbol{m}$ 的大小和方向都保持不变. 注意到 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$，用双叉乘表示的公式(3.4.7)可化成

$$\boldsymbol{F}=\nabla(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B})-\boldsymbol{m}(\nabla\cdot\boldsymbol{B})=\nabla(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}). \tag{3.4.8}$$

式中都略去了 B 的下标 0，因为原来 B_0 代表的就是任意位置上磁感应强度. 所导出的磁力有 $F=-\nabla U$ 的形状，说明它是保守力. 因此其中

$$U=-\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B} \tag{3.4.9}$$

是磁偶极子在外磁场中平动时的势能.

现在再计算电流系统所受的力矩. 仍按洛伦兹力公式，力矩 $\boldsymbol{N}$ 应是

$$N = \iiint r \times (j(r) \times B(r))\mathrm{d}\tau. \qquad (3.4.10)$$

当电流区很小，同样可把外磁场展开成(3.4.2). 现在首项的贡献不为零. 我们只要其领头项，所以力矩可化成

$$\begin{aligned} N &= \iiint r \times (j(r) \times B_0)\mathrm{d}\tau \\ &= B_0 \cdot \iiint rj\mathrm{d}\tau - B_0 \iiint r \cdot j\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \qquad (3.4.11)$$

再利用

$$\nabla \cdot (jr^2) = r^2 \ \nabla \cdot j + j \cdot \nabla r^2 = 2j \cdot r. \qquad (3.4.12)$$

由两边作体积分，而左边为零，得知(3.4.11)右边第二项为零. 对右边第一项用(3.4.5)和矢量双叉乘公式，最后把力矩化成

$$N = m \times B_0. \qquad (3.4.13)$$

我们看到，电流系统在外磁场中所受的力矩也仅与系统的磁矩有关，而并不依赖于系统的其他细节. 当把小电流系统当作一个磁偶极子时，式中的 B_0 是磁偶极子所在位置上的磁感应强度，因此其下标 0 可略去.

用磁偶极子在外磁场中的力矩公式可简单地解释 1.7 节中提到的拉莫尔进动. 回到图 1.8，磁偶极子的角动量 L 与磁矩同向. 力矩 N 决定 L 的变化，因此转轴将向如图的方向转动. 这就是拉莫尔进动. 进动的方向必与磁场反向，从而产生的是逆磁效应.

有了磁力矩的公式，我们可以讨论磁偶极子在外场中转动时力矩所做的功 W. 设 m 与 B 的夹角为 θ，则

$$W = - mB\sin\theta\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}(m \cdot B). \qquad (3.4.14)$$

这说明当磁偶极子转动时，m 的方向有了变化，而 $U = -m \cdot B$ 依然具有势能的意义. 由此得出结论，不管磁偶极子在外磁场中作平动或转动，只要 m 的大小不变，由(3.4.9)式定义的 U 都代表它的势能.

最后指出一点，2.4 节中曾论证过电偶极子在外电场中势能的变化实际上是电场场能变化的反映. 这论证在本问题中并不适

用. 设想磁偶极子是一个电流圈. 当它在非均匀磁场中作平动或在均匀磁场中作转动时,圈内的磁通量要改变,并相应会产生感应电动势. 为保持磁矩 $\boldsymbol{m}$ 的大小不变,必须要靠外电动势来维持原来的电流强度. 这样,电流强度不变的电流圈和外磁场不构成孤立系统,所以与静电势能类似的论证就不适用了.

3.5 磁场的标势和磁荷的概念

本章第一节中曾指出,由于磁场是有旋场,一般不能引入标量势. 但是在一定条件下,我们依然能够定义磁场的标量势,且它也是讨论静磁问题的有效手段.

因为磁标势常被用来讨论铁磁体的磁场,所以我们不限于考虑线性介质,而用更一般的静磁方程为出发点来讨论. 这组方程是

$$\nabla\cdot \boldsymbol{B} = 0, \tag{3.5.1}$$

$$\nabla\times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}, \tag{3.5.2}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}). \tag{3.5.3}$$

让我们注意,这组方程虽是普遍的,但并不完备. 对普通线性介质或铁磁介质,都须补上由介质特性决定的关系 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}(\boldsymbol{B})$ 或 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}(\boldsymbol{H})$,方程组才完备.

首先从数学的角度回顾一下对某矢量场定义其标量势的条件. 它可表述成定理如下:在区域 V 内有矢量场 $\boldsymbol{H}$,若对 V 内任一闭合曲线 C 都有

$$\oint_C \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0, \tag{3.5.4}$$

则必能引入一单值的标量函数 φ_m,它与矢量场 $\boldsymbol{H}$ 的关系是

$$\boldsymbol{H} = -\nabla\varphi_m. \tag{3.5.5}$$

这定理的证明很简单. 前提(3.5.4)表明,$\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的曲线积分与路径无关. 因此我们能用矢量场 $\boldsymbol{H}$ 来定义一个标量函数 φ_m,

$$\varphi_m(\boldsymbol{r}) = \varphi_m(\boldsymbol{r}_0) - \int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}, \tag{3.5.6}$$

其中 $\boldsymbol{r}_0$ 是任选的基准点．由于这积分与路径无关，所以相应的 φ_m 是 V 内的单值函数．从定义式(3.5.6)知，任意两个相邻点的标势差 $\Delta\varphi_m = -\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$，这说明 $\boldsymbol{H}$ 与 φ_m 的关系满足(3.5.5)．从而定理得证．

现在把它用于静磁问题．对于有传导电流存在的情形，我们总可在全空间中挖去一部分，使余下的区域 V 内没有传导电流．这样，V 内处处满足

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = 0, \tag{3.5.7}$$

但是这并不保证能在 V 内可引入单值的磁标势．让我们用例子来看清其原因．

设磁场源是一个电流圈．若仅在电流圈附近挖去一个环形区，如图 3.3(a)所示．在余下的区域 V 内虽然处处满足 $\nabla\times\boldsymbol{H}=0$，但条件(3.5.4)并不成立．$V$ 内有如图的曲线 C，按斯托克斯定理有

$$\oint_C \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = I \neq 0, \tag{3.5.8}$$

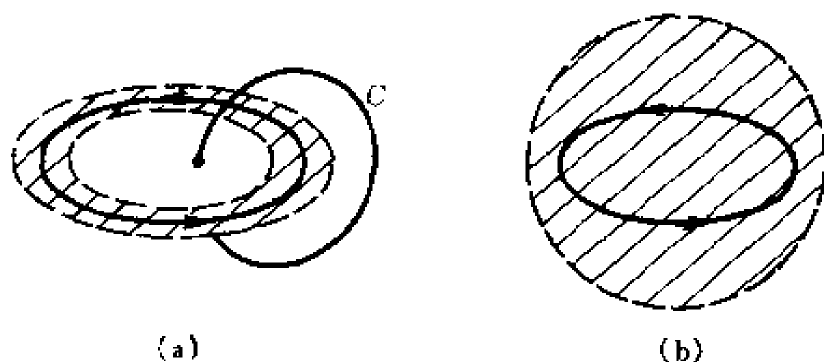


图 3.3　挖去电流区

其中的 I 是源的电流强度．这样，用(3.5.6)定义的 φ_m 将是多值函数，从而不是物理上所要的．若挖去一个把电流圈完全包在内的球形区(图 3.3(b))，则在余下的区域 V 内使 $\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 不为零的

回路不再存在．按上述数学定理，就能够引入单值的磁标势 φ_m．用数学讲，差别在于前一情况下的 V 是复通区，而后一情况下的 V 是单通区．从这例子归结到一般：若能划出一个空间区域 V，使 V 是一个没有传导电流的单通区，那么在 V 内就可引入磁场的标量势 φ_m，且它是一个单值函数．在 3.3 节中讨论电流圈外的磁场时曾出现过磁标势，它就是这结论的体现．

在能够引入单值磁标势的情况下，需要有 φ_m 满足的微分方程，以便用数学方法求解它．这时方程(3.4.2)已在 V 内自动成立．φ_m 的方程应从(3.5.1)式导出．下面，我们把有或没有铁磁质的情况分开讨论．

先讨论没有铁磁质的情形．普通的介质满足

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}, \tag{3.5.9}$$

由(3.5.1)推知，区域 V 内的磁标势 φ_m 满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \varphi_m = 0. \tag{3.5.10}$$

当 V 内有多种介质存在，则 φ_m 在界面两边必满足连接条件

$$\varphi_{m1} = \varphi_{m2}, \tag{3.5.11}$$

$$\mu_1 \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial n}, \tag{3.5.12}$$

其中后一式是 $\boldsymbol{B}$ 的法向分量连续的体现．值得注意的是，由于磁场源必在区域 V 之外，所以方程中不出现电流．电流对 V 内磁标势分布的影响将通过边值来体现．这样，静磁问题转化成了一个拉普拉斯方程的边值问题．若知道 V 在边界上的磁标势，或磁场强度 H 的法向分量，V 内的磁场分布就唯一地确定了．

磁标势更多地用于讨论铁磁体产生的磁场．这情况下全空间没有传导电流，因此与静电情况一样，标势 φ_m 在全空间有意义．问题在于铁磁质的磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 对磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 的依赖关系很复杂．图 3.4 示意地画出了磁铁的磁化曲线，其中的箭头表示 $\boldsymbol{H}$ 的变化方向．从图看出，磁化强度不仅与 $\boldsymbol{H}$ 有关，而且与磁化的过程有关．因此要作理论处理，首先须考虑对问题中 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的关系

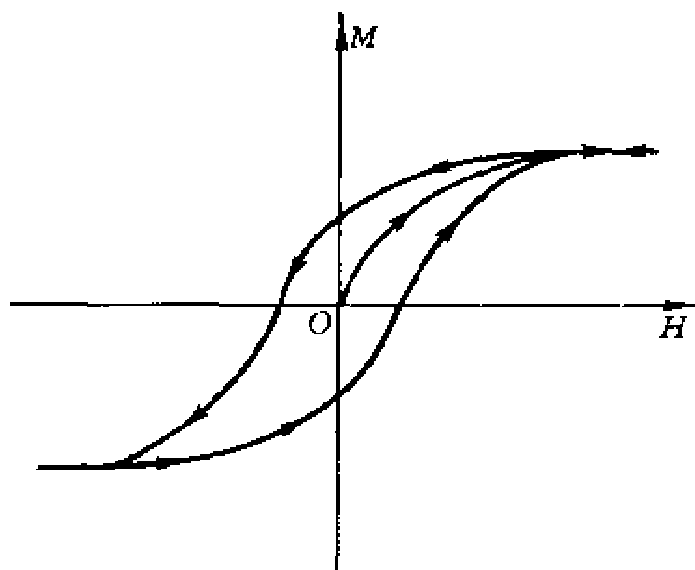


图 3.4 磁滞回线

能作什么样的近似. 下面不对此作一般讨论,而仅讨论永久磁铁所产生的磁场. 并由此引申出磁荷的概念.

若已知永久磁铁的磁化强度为 $\boldsymbol{M}$,由(3.5.1)和(3.5.3)知,磁标势满足的微分方程是

$$\nabla^2\varphi_m = \nabla\cdot\boldsymbol{M}. \tag{3.5.13}$$

它与有自由电荷存在时的静电势方程十分类似. 人们常把

$$\rho_m = -\mu_0\ \nabla\cdot\boldsymbol{M} \tag{3.5.14}$$

叫做磁铁内的磁荷密度. 方程(3.5.13)相应写作

$$\nabla^2\varphi_m = -\rho_m/\mu_0. \tag{3.5.15}$$

我们已经知道,磁铁的磁场是由磁偶极子产生的,因此磁荷只是后者的等效描述. 在 2.2 节中讨论过,极化介质中的电偶极子可等效地用束缚电荷来描述. 这里的道理是一样的. 当磁铁内的磁化不均匀时,它才有体磁荷存在. 考虑到磁铁的大小是有限的,所以它的表面必有等效的面磁荷存在. 参照 2.2 节的处理,表面的面磁荷密度为

$$\Sigma_m = \mu_0\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{n}. \tag{3.5.16}$$

这样,一块磁铁被等价地看成了一个既有体磁荷又有面磁荷的系

统. 磁荷产生磁标势的规律与电荷产生电势的规律又一样. 因此我们可以搬用处理静电问题的方法来求解磁铁的磁场.

这里举一个简单的例子. 设有一个均匀磁化的磁铁球,其半径为 a,其磁化强度为 $\boldsymbol{M}$,求它所产生的磁场.

这问题是上面的理论的一个直截了当的应用. 这情况下磁铁内的磁荷体密度为零. 磁荷只分布在表面上,面密度为 $\mu_0\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{n}$. 它所产生的磁标势可模仿库仑定律写出,

$$\varphi_m = \frac{1}{4\pi}\oiint\frac{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}. \tag{3.5.17}$$

把极坐标原点取在球中心,并让极轴与极化方向一致. 利用

$$\boldsymbol{M}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}' = Ma^2\cos\theta'\,\mathrm{d}\Omega', \tag{3.5.18}$$

上式化为

$$\varphi_m = \frac{a^2}{4\pi}\iint\frac{\cos\theta'\sin\theta'\,\mathrm{d}\theta'\,\mathrm{d}\varphi'}{\sqrt{r^2+a^2-2ra(\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos\varphi')}}, \tag{3.5.19}$$

这积分可解析地积出. 让我们略去对计算技巧的讨论,写出结果如下:

$$\varphi_m = \begin{cases}\dfrac{1}{3}\dfrac{Ma^3}{r^2}\cos\theta, & r\geqslant a;\\[2mm] \dfrac{1}{3}Mr\cos\theta, & r\leqslant a.\end{cases} \tag{3.5.20}$$

从这结果看到,磁球内的磁场是均匀的. 易于由定义推出

$$\boldsymbol{H}_{内} = -\nabla\varphi_m = -\frac{\boldsymbol{M}}{3}, \tag{3.5.21}$$

$$\boldsymbol{B}_{内} = \mu_0(\boldsymbol{H}_{内}+\boldsymbol{M}) = \frac{2}{3}\mu_0\boldsymbol{M}. \tag{3.5.22}$$

按这方法处理时,磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 与电场强度 $\boldsymbol{E}$ 相应,因此磁力线从正磁荷出发而走向负磁荷. (3.5.21)中 $\boldsymbol{H}_{内}$ 与 $\boldsymbol{M}$ 反号,可这样定性理解. 现在磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 成了导出量,它的方向不能直接从磁荷分布看出.

为了清楚地表达磁铁外的磁场，我们引入磁球的总偶极矩 $\mathbf{m}=\frac{4\pi}{3}a^3\boldsymbol{M}$. 球外的磁标势可重写作

$$\varphi_m=\frac{1}{4\pi}\frac{\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{e}_r}{r^2}. \tag{3.5.23}$$

这是一个把磁铁的磁矩集中于球心时的磁偶极场. 磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 和磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的分布为

$$\boldsymbol{B}_{外}=\mu_0\boldsymbol{H}_{外}=-\mu_0\ \nabla\varphi_m=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_r-\mathbf{m}}{r^3}. \tag{3.5.24}$$

图 3.5 中画出了 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的场线. 不管在磁铁内外，$\boldsymbol{H}$ 线总从正磁荷走向负磁荷. 磁感应线永远是封闭的. 内部 $\boldsymbol{B}$ 为顺向正是这一性质的反映.

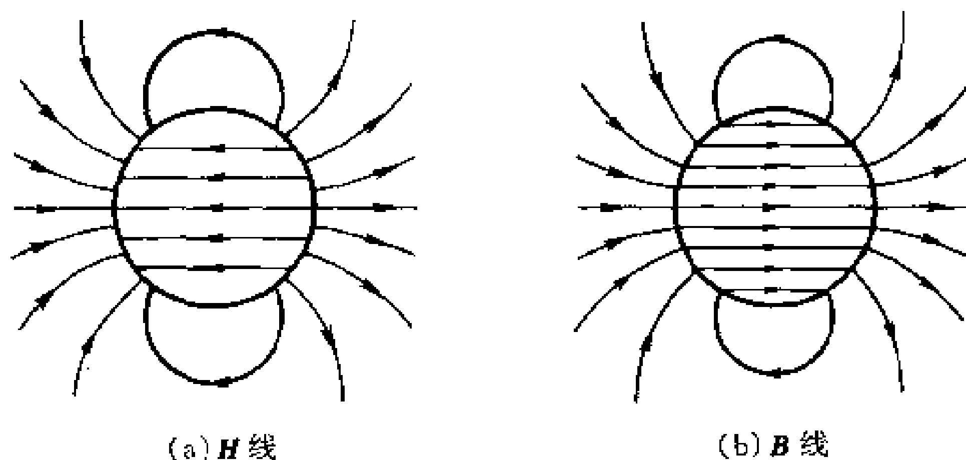


图 3.5 球形磁铁的磁力线

最后强调，今天人们对原子和分子的结构已有很清楚的了解，介质中并不存在载磁荷的实体. 然而磁荷的概念却依然在使用，且很有效. 我们可以这样理解：铁磁体的磁场来自它内部的磁偶极矩，这是问题的本质方面，磁荷仅是它的一种等效处理方法.

3.6 静磁屏蔽

当软铁磁质处在不太强的外磁场中，它的磁化性质能近似地

用 $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$ 描述. 这时它的特征是磁导率很大[①],即 $\mu\gg\mu_0$. 现在我们用它来讨论静磁场的屏蔽问题.

设在均匀的静磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 中放置一个由磁导率为 μ 的软铁磁质做成的球壳,其内径和外径分别为 R_1 和 R_2. 按上节的(3.5.10)式,问题中的磁标势 φ_m 处处满足拉普拉斯方程 $\nabla^2\varphi_m=0$. 下面先用特解叠加法来计算全空间的磁场分布,然后用它讨论铁壳对壳内区域的屏蔽作用. 由于理论处理的方法与 2.7 节中的例子很相近,这里只扼要地写出计算的步骤.

采用以 $\boldsymbol{B}_0$ 方向为极轴的球坐标,并把坐标原点取在球心上. 我们把磁标势的分布分三个区域来解. 考虑到场的轴对称性,解的形式是

$$\varphi_{m1}=-\frac{B_0}{\mu_0}r\cos\theta+\sum_l a_l r^{-(l+1)}\mathrm{P}_l(\cos\theta),\quad r>R_2;\tag{3.6.1}$$

$$\varphi_{m2}=\sum_l(b_l r^{-(l+1)}+c_l r^l)\mathrm{P}_l(\cos\theta),\quad R_2>r>R_1;\tag{3.6.2}$$

$$\varphi_{m3}=\sum_l d_l r^l\mathrm{P}_l(\cos\theta),\quad r<R_1.\tag{3.6.3}$$

在写下(3.6.1)时,已用到了无穷远边条件;在写(3.6.3)时,则已利用了中心点的物理条件(参看 2.7 节中的分析). 现在需要的是让它们在壳的内外界面上满足边界连接条件(3.5.11)和(3.5.12). 这四个方程能把四组系数 a_l,b_l,c_l 和 d_l 确定下来.

让我们略去计算过程,而直接写出结果. 三个区域内的磁标势分别是

$$\varphi_{m1}=-\frac{B_0}{\mu_0}r\cos\theta+\frac{a_1\cos\theta}{r^2},\tag{3.6.4}$$

① μ/μ_0 一般为 10^4 或更高.

$$\varphi_{m2} = c_1 r\cos\theta + \frac{b_1\cos\theta}{r^2}, \tag{3.6.5}$$

$$\varphi_{m3} = d_1 r\cos\theta. \tag{3.6.6}$$

考虑到 $\mu \gg \mu_0$,解出的系数为

$$a_1 = \frac{R_2^3 B_0}{\mu_0}, \tag{3.6.7}$$

$$b_1 = -\frac{3R_1^3 B_0}{2\mu\left(1-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3\right)}, \tag{3.6.8}$$

$$c_1 = -\frac{6B_0}{2\mu\left(1-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3\right)}, \tag{3.6.9}$$

$$d_1 = -\frac{9B_0}{2\mu\left(1-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3\right)}. \tag{3.6.10}$$

这个解说明,壳外和壳内部的场都是均匀场加偶极场的形式,而中间的空腔中只有一个均匀场. 四个系数的物理意义都是自明的. 我们从计算结果来讨论铁壳对静磁场的屏蔽效应.

相应的磁感应线画在图 3.6 中. 我们首先感兴趣的是空腔中的磁感应强度与原场强之比. 注意到 $\boldsymbol{B}_{内} = -\mu_0 \nabla\varphi_{m3}$,并令$\Delta R = R_2 - R_1$,有

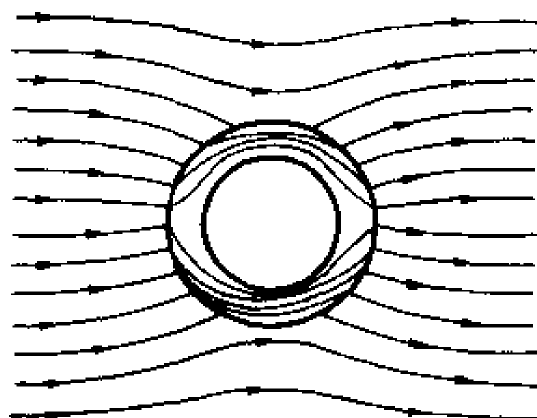


图 3.6 铁壳的磁屏蔽

$$\frac{B_{内}}{B_0}=\frac{9\mu_0}{2\mu\left[1-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3\right]}\approx\frac{\mu_0}{\mu}\frac{R_2}{\Delta R}\ll 1. \tag{3.6.11}$$

这反映了铁壳的屏蔽效应．屏蔽的程度主要取决于 μ/μ_0，此外还与壳的厚度有关．厚壳比薄壳有更强的屏蔽作用．要说明为什么高磁导率的介质有屏蔽效果，则需要看壳内部的磁感应强度的分布．

在壳内部，$\boldsymbol{B}_{壳}=-\mu\nabla\varphi_{m2}$．对于半定量的分析，算 $\boldsymbol{B}_{壳}$ 时可只考虑由(3.6.5)式右边的第一项．这样估出

$$\frac{B_{壳}}{B_0}\sim\frac{6}{2\left[1-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3\right]}\sim\frac{R_2}{\Delta R}. \tag{3.6.12}$$

把壳内和腔内的磁感应强度相比较，两者之比大体与 μ/μ_0 相当，即前者要大好几个量级．这表明绝大部分原来应穿过空腔区的磁感应线都集中到了壳内(参看图 3.6)，从而导致了腔内磁场的明显减弱．由此可理解，我们把铁壳设成球形只是为了计算方便，而并不是本质的．屏蔽作用的关键是壳的高磁导率．

此外值得注意壳内的磁场强度 $\boldsymbol{H}_{壳}$．屏蔽前的磁场强度是 $\boldsymbol{H}_0=\boldsymbol{B}_0/\mu_0$．按同样的估算，得到

$$\frac{H_{壳}}{H_0}=\frac{\mu_0}{\mu}\frac{B_{壳}}{B_0}\sim\frac{\mu_0}{\mu}\frac{R_2}{\Delta R}. \tag{3.6.13}$$

由于 $\mu\gg\mu_0$，$\boldsymbol{H}_{壳}$ 比原场 $\boldsymbol{H}_0$ 要显著地小，而它与空腔内的磁场强度 $\boldsymbol{H}_{内}$ 是同量级的．如果理想化地设 $\frac{\mu}{\mu_0}\to\infty$，我们看到，腔内将有完全的磁屏蔽，而壳内的磁场强度 $\boldsymbol{H}_{壳}$ 也趋于零．铁壳成了一个等磁势体．这结果反映了一个一般的道理(请当习题证明)：高磁导率介质的表面在静磁场中是一个等磁势面，就像导体表面在静电场中是等电势面一样．这道理在磁场设计上是有用的．

第4章 电磁波的传播

4.1 真空中的平面电磁波

现在我们转向讨论随时间变化的电磁场. 下面将即看到,变化的电磁场以波的方式传播. 变化的电流是产生电磁波的源. 电磁波一经产生,它会离开其源而按自身的规律运动. 因此这里有两重问题. 一重是电磁波对它的源的依赖关系,即电磁波的激发问题. 另一重是电磁波的自身运动,即电磁波的传播问题. 本章先讨论后一个问题.

当电磁波离开了产生它的源而在真空中传播时,它遵循的方程是

$$\nabla\cdot \boldsymbol{E} = 0, \tag{4.1.1}$$

$$\nabla\times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{4.1.2}$$

$$\nabla\cdot \boldsymbol{B} = 0, \tag{4.1.3}$$

$$\nabla\times \boldsymbol{B} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}. \tag{4.1.4}$$

由(4.1.2)和(4.1.4)可消去磁场 $\boldsymbol{B}$,得到

$$\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \nabla\times\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\nabla\times(\nabla\times \boldsymbol{E})$$
$$= \nabla^2\boldsymbol{E} - \nabla(\nabla\cdot \boldsymbol{E}), \tag{4.1.5}$$

再利用(4.1.1)式,看到电场 $\boldsymbol{E}$ 满足的是波动方程

$$\nabla^2\boldsymbol{E} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0. \tag{4.1.6}$$

显然,如果先消去 $\boldsymbol{E}$,将会看到磁场 $\boldsymbol{B}$ 满足同样的波动方程,

$$\nabla^2 \boldsymbol{B} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} = 0. \tag{4.1.7}$$

这说明了电场和磁场都将按波的方式运动.

下面我们将用(4.1.6)来代替(4.1.4)作为基本方程①. 这组方程中的(4.1.6)和(4.1.1)决定了电波的行为,后者被称为电波的横波性条件. (4.1.2)式则给出电波与磁波的相互关系. 若电波先被求出,我们将用(4.1.2)式来定磁波. (4.1.3)是磁波的横波性条件.

波动方程是线性齐次方程. 在采用特定的坐标后,我们可以用分离变数法求出一组完备的特解. 这特解本身常就有重要的物理意义,而且任意解都可用这组特解的组合来表示. 下面我们将着重讨论直角坐标下的特解. 略去大家已熟悉的处理过程,直接写出特解如下:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)}, \tag{4.1.8}$$

为了方便,我们采用解的复数形式. 物理的电波应理解为上述解的实部. 解式中的 $\boldsymbol{E}_0$ 是任意复矢量,它不仅代表电波振幅的三个分量,而且也分别描述了三者的初相位.

让我们先对这特解的几点基本性质作一个扼要的回顾.

(1) 它的等相面

$$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t = \text{const.} \tag{4.1.9}$$

是平面,因此它描述的是一个平面波.

(2) 从同一时间看,相位差 2π 的两个等相面间的距离 λ 是波长. 令 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} = kr_0$,其中 r_0 是原点至该等相面的垂直距离(图 4.1).

由 $k\Delta r_0 = 2\pi$ 定出

$$\lambda = 2\pi/k, \tag{4.1.10}$$

---

① 不能把电波和磁波的波动方程(4.1.6)和(4.1.7)与它们的横波性条件(4.1.1)和(4.1.3)放在一起来代替麦克斯韦方程组,因为它没有把电波与磁波的联系反映进去. 用(4.1.6)代(4.1.4)仅是一种可以采用的方法. 当这样做,将先解出电波,然后推断磁波. 显然反过来做也完全可以. 电波与磁波是平等的.

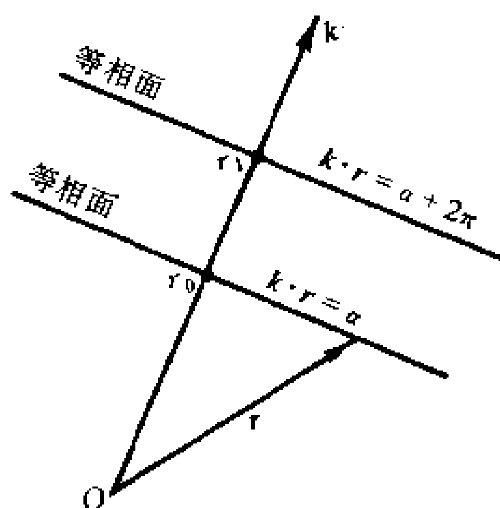


图 4.1　平面波的等相面

矢量 $\boldsymbol{k}$ 被称为波矢. 它的方向是等相面的传播方向.

(3) 从空间同一点看,相位改变 2π 所要的时间是周期 T. 由 $\omega\Delta t=2\pi$ 定出

$$T = 2\pi/\omega, \tag{4.1.11}$$

ω 称为角频率.

(4) 等相面的运动速度叫相速度 v. 由 $kr_0-\omega t=\text{const}$. 求微分得到

$$v = \mathrm{d}r_0/\mathrm{d}t = \omega/k. \tag{4.1.12}$$

下面我们讨论电磁规律所赋予它的性质.

要求特解(4.1.7)满足波动方程(4.1.6),ω 与 k 须有关系

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \varepsilon_0\mu_0\omega^2. \tag{4.1.13}$$

这表明波矢 $\boldsymbol{k}$ 的三个分量和角频率 ω 中只有三个参量是独立的. 把这关系用于(4.1.12),得知电磁波在真空中的相速度 c 为

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}. \tag{4.1.14}$$

它说明真空中的光速 c 是由 ε_0 和 μ_0 决定的. k 和 ω 的关系可重写为

$$k = \omega/c. \tag{4.1.15}$$

此外特解(4.1.7)还必须满足横波条件(4.1.1). 代入得到

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_0 = 0. \tag{4.1.16}$$

它说明平面波中的电矢量必与波矢 $\boldsymbol{k}$ 相垂直,因此复振幅 $\boldsymbol{E}_0$ 中只有两个独立分量,即只包含四个独立的实参量. 它们分别描述与 $\boldsymbol{k}$ 垂直的平面上的两个振幅和两个初相位. 由此看来,为完全描述一个平面电波需要确定七个实的物理参量.

当电波一旦确定,磁波可由(4.1.3)式推出. 从

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\nabla\times\boldsymbol{E} = -\mathrm{i}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}. \tag{4.1.17}$$

对 t 积分后得出

$$\boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{k}}{\omega}\times\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B}_1(x,y,z), \tag{4.1.18}$$

其中 $\boldsymbol{B}_1$ 是可附加的任意静磁场,它不是我们感兴趣的,以后将不写在式中. 代回(4.1.3)看到,其中波动部分已自动满足横波条件. 这样,我们以后将把磁波写成

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}, \tag{4.1.19}$$

它的参量完全被电波的参量所确定,而不再有独立参量. 两者有相同的波矢 $\boldsymbol{k}$ 和角频率 ω. 波幅间的关系为

$$\boldsymbol{B}_0 = \frac{\boldsymbol{k}}{\omega}\times\boldsymbol{E}_0 = \frac{1}{c}\boldsymbol{e}(\boldsymbol{k})\times\boldsymbol{E}_0. \tag{4.1.20}$$

考虑到真实物理量是其实部,上式可重写作

$$\mathrm{Re}\boldsymbol{B} = \frac{1}{c}\boldsymbol{e}(\boldsymbol{k})\times\mathrm{Re}\boldsymbol{E}. \tag{4.1.21}$$

它告诉我们,$\boldsymbol{k}$,Re$\boldsymbol{E}$ 和 Re$\boldsymbol{B}$ 两两垂直,并构成右手系;电波和磁波的物理振幅的大小满足关系

$$\mathrm{Re}B = \frac{1}{c}\mathrm{Re}E. \tag{4.1.22}$$

值得指出,在国际单位制中,$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 有不同的量纲,因此不具有可比性. 在 4.3 节中将看到,(4.1.22)式说明电波和磁波有相同的能量密度. 从这意义上讲,电波与磁波是等强度的.

4.2 偏振的描述

上节中已指出，平面电磁波的波矢 $\boldsymbol{k}$ 是确定的. 为了方便，我们把它取作为 z 轴的方向. 这电磁波写作

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0 e^{i(kz-\omega t)}, \tag{4.2.1}$$

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0 e^{i(kz-\omega t)}. \tag{4.2.2}$$

由横波性条件知，其中的 $\boldsymbol{E}_0$ 和 $\boldsymbol{B}_0$ 都是 x 和 y 平面上的复矢量. 两者的关系为

$$\boldsymbol{B}_0=\frac{1}{c}\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{E}_0. \tag{4.2.3}$$

本节讨论平面电磁波的偏振，即波中任一点上电磁矢量的振动状况. 因为电矢量和磁矢量的关系完全由(4.2.3)确定，所以只须分析其中一个(如电矢量)就够了.

从迎着电磁波传播方向(即逆 z 轴方向)看，电矢量的变化可用 x 和 y 平面上的矢端曲线来描写. 为讨论物理的电场强度，把(4.2.1)的实部写出

$$\mathrm{Re}E_x=|E_{ox}|\cos(kz-\omega t+\alpha_x), \tag{4.2.4}$$

$$\mathrm{Re}E_y=|E_{oy}|\cos(kz-\omega t+\alpha_y). \tag{4.2.5}$$

注意电场强度的两个分量一般会有不同的初相位，这里分别记作 α_x 和 α_y. 从(4.2.4)和(4.2.5)易于看出，在一般情况下，空间任一点上的电场强度的矢端曲线是一个椭圆. 下面讨论怎么把椭圆振动分解为两种基本振动模式的叠加.

先看 $\alpha_y=\alpha_x$ 或 $\alpha_y=\alpha_x+\pi$ 的情形. 这时有

$$\frac{\mathrm{Re}E_y(t)}{\mathrm{Re}E_x(t)}=\pm\frac{|E_{oy}|}{|E_{ox}|}, \tag{4.2.6}$$

即 $\mathrm{Re}\boldsymbol{E}$ 作直线振动. 这样的波被称为线偏振波(图 4.2). 让我们用两种基本的线偏振模式来定义一组基：

$$\varepsilon_{1线}=\boldsymbol{e}_x e^{i(kz-\omega t)}, \tag{4.2.7}$$

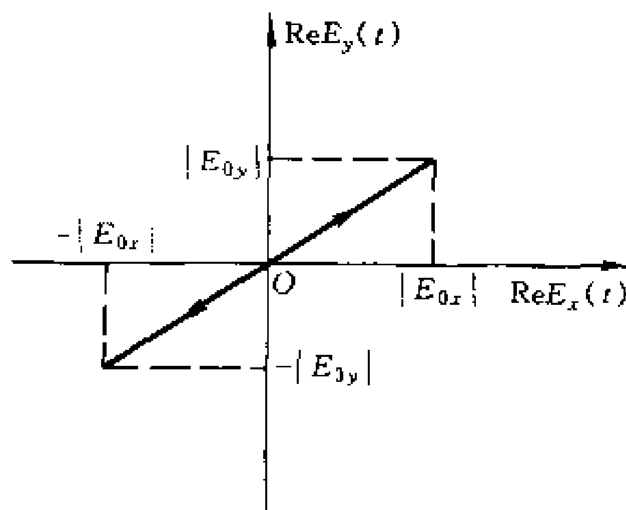


图 4.2 线偏振波

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{2线} = \boldsymbol{e}_y \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}. \tag{4.2.8}$$

它们分别代表 x 或 y 方向的单位振幅的线偏振波．当允许组合系数 E_1 和 E_2 为任意复数，(4.2.1)总可表成

$$\boldsymbol{E} = E_1\boldsymbol{\varepsilon}_{1线} + E_2\boldsymbol{\varepsilon}_{2线}. \tag{4.2.9}$$

这就是用线偏振波的叠加来描述任意的椭圆偏振波．因此在引用线偏振基时，并不意味着所讨论的是线偏振波．仅当 E_1 和 E_2 的幅角差为 0 或 π 时，它才是线偏振波．

下面看 $\alpha_y=\alpha_x\pm\pi/2$，且 $|E_{0x}|=|E_{0y}|=E_0$ 的情形．这时(4.2.4)和(4.2.5)重写成

$$\mathrm{Re}E_x = E_0\cos(kz-\omega t+\alpha_x), \tag{4.2.10}$$

$$\mathrm{Re}E_y = \mp E_0\sin(kz-\omega t+\alpha_x). \tag{4.2.11}$$

这两种情形下，Re$\boldsymbol{E}$ 的矢端曲线都是圆，因此叫圆偏振波．当 $\alpha_y=\alpha_x-\pi/2$，迎面看来矢端作顺时针方向转动，光学中叫它右旋波．若 $\alpha_y=\alpha_x+\pi/2$，则叫左旋波(图 4.3)．理论上把旋转方向与传播方向呈右手关系的情形称其涡度为正，反之涡度为负．这样，右旋波的涡度为负，而左旋波的涡度为正．

两种基本的圆偏振模式也构成一组基．这组基可写成

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{1圆} = \boldsymbol{e}_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}, \tag{4.2.12}$$

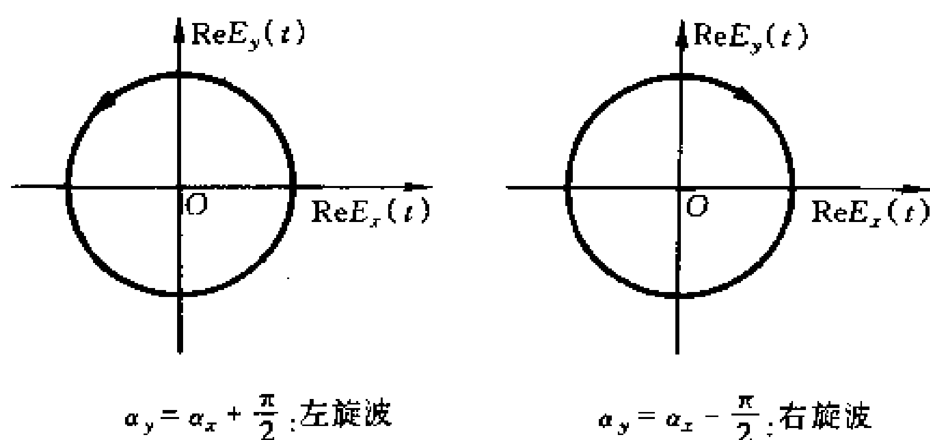


图 4.3　圆偏振波

$$\boldsymbol{\epsilon}_{2圆} = \boldsymbol{e}_2 e^{i(kz-\omega t)}, \tag{4.2.13}$$

其中的单位矢量 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 定义为

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_x - i\boldsymbol{e}_y), \tag{4.2.14}$$

$$\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_x + i\boldsymbol{e}_y). \tag{4.2.15}$$

它们是两种单位振幅的圆偏振波.（4.2.12)描述的是右旋圆偏振波,(4.2.13)所描述的是左旋波.

引用圆偏振基同样不只是为了讨论圆偏振波. 任意的椭圆偏振波也可用这组圆偏振基的线性组合来表示,

$$\boldsymbol{E} = E_{右}\,\boldsymbol{\epsilon}_{1圆} + E_{左}\,\boldsymbol{\epsilon}_{2圆}. \tag{4.2.16}$$

其中 $E_{右}$ 和 $E_{左}$ 是任意的复常数. 它们分别代表右旋或左旋部分的振幅和初相位. 把(4.2.16)与(4.2.9)作对比,我们有

$$E_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{左} + E_{右}), \tag{4.2.17}$$

$$E_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}(E_{左} - E_{右}), \tag{4.2.18}$$

它是同一个波的两种不同描述间的关系. 从这里看到,基的引入只是一种描述手段. 对任一个波,既可采用线偏振基来描述,也可用圆偏振基来描述. 例如线偏振波也可看成圆偏振波的叠加. 实

际问题中采用哪一种基，往往取决于测量的手段.

从上面的分析看，虽然电波两个分量的初相位都是独立参量，但波的偏振状态仅由两者的相位差决定. 绝对初相位没有意义，从而可任意选取. 这样，决定平面电磁波的行为只有六个有意义的物理参量. 除 $\boldsymbol{k}$ 和 ω 中的三个独立参量外，另三个是电矢量的两个实振幅分量和两者的相位差.

4.3 平面电磁波的能量和能流

第 1 章中已论证过，电磁场具有能量密度 w，

$$w = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right), \tag{4.3.1}$$

和能流密度 $\boldsymbol{S}$，

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}, \tag{4.3.2}$$

现在我们用它们来计算平面电磁波的能量密度和能流密度.

能量密度和能流密度都与场量的二次项有关. 当对场量采用复数描述，须注意对复数 Z 有

$$\mathrm{Re}(Z^2) \neq (\mathrm{Re}Z)^2, \tag{4.3.3}$$

$$\mathrm{Re}(Z_1 Z_2) \neq \mathrm{Re}Z_1 \cdot \mathrm{Re}Z_2. \tag{4.3.4}$$

因此在涉及二次运算时，为得到物理上所要的结果，必须先取场量的实部，而后作二次运算. 这样在用 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为复场量时，能量和能流密度公式应写作

$$w = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 |\mathrm{Re}\boldsymbol{E}|^2 + \frac{1}{\mu_0}|\mathrm{Re}\boldsymbol{B}|^2\right), \tag{4.3.5}$$

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathrm{Re}\boldsymbol{E} \times \mathrm{Re}\boldsymbol{B}. \tag{4.3.6}$$

对于平面电磁波，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的实部有关系

$$\mathrm{Re}\boldsymbol{B} = \frac{1}{c}\,\boldsymbol{e}(\boldsymbol{k}) \times \mathrm{Re}\boldsymbol{E}, \tag{4.3.7}$$

其中 $e(k)$ 是波传播方向上的单位矢量. 记得 $c^2=\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}$,因此有

$$|\mathrm{Re}\boldsymbol{B}|^2 = \frac{1}{c^2}|\mathrm{Re}\boldsymbol{E}|^2 = \varepsilon_0\mu_0|\mathrm{Re}\boldsymbol{E}|^2. \tag{4.3.8}$$

对照(4.3.5)看出,在电磁波中电场与磁场对能量密度有相同的贡献. $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的大小差一个因子 c,纯是由国际单位制的定义造成的. 当在电磁波的能量密度公式中只保留电波或磁波,它写成

$$w = \varepsilon_0|\mathrm{Re}\boldsymbol{E}|^2 = \frac{1}{\mu_0}|\mathrm{Re}\boldsymbol{B}|^2. \tag{4.3.9}$$

注意这表达式中已把两者的贡献都包括在内了. 此外利用(4.3.7),能流密度也可相应地只用电波或磁波表示,

$$\boldsymbol{S} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}|\mathrm{Re}\boldsymbol{E}|^2\boldsymbol{e}(\boldsymbol{k}) = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}|\mathrm{Re}\boldsymbol{B}|^2\boldsymbol{e}(\boldsymbol{k}). \tag{4.3.10}$$

把(4.3.9)和(4.3.10)作对比,看出 $\boldsymbol{S}$ 和 w 的关系为

$$\boldsymbol{S} = wc\,\boldsymbol{e}(\boldsymbol{k}). \tag{4.3.11}$$

这关系式说明对于真空中的平面电磁波,它的能流密度 $\boldsymbol{S}$ 就是能量密度 w 以光速 c 沿传播方向的流动.

我们仍对电波用复数写成(4.2.1)的形式. 这样有

$$\begin{aligned}|\mathrm{Re}\boldsymbol{E}|^2 = &|E_{0x}|^2\cos^2(kz-\omega t+\alpha_x)\\ &+|E_{0y}|^2\cos^2(kz-\omega t+\alpha_y).\end{aligned} \tag{4.3.12}$$

它说明任一点上的能量密度都是随时间变化的. 考虑到实际电磁波的振动周期很短,所以可用能量密度和能流密度的周期平均来代表实测值. 注意到 $\cos^2(\omega t+\alpha)$ 的周期平均值为 1/2,所以 $|\mathrm{Re}\boldsymbol{E}|^2$的平均值为

$$\langle|\mathrm{Re}\boldsymbol{E}|^2\rangle = \frac{1}{2}(|E_{0x}|^2+|E_{0y}|^2) = \frac{1}{2}\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{E}_0^*, \tag{4.3.13}$$

其中 $\boldsymbol{E}_0^*$ 是复振幅 $\boldsymbol{E}_0$ 的复共轭. 这样,周期平均后的能量密度公式为

$$w = \frac{\varepsilon_0}{2} \boldsymbol{E}_0 \cdot \boldsymbol{E}_0^*. \tag{4.3.14}$$

周期平均后的能流密度可同样计算. 当对电磁波采用复数描述时,这些公式是便于计算的. 我们必须记得,虽然没有加标记,但所算出的是其周期平均值.

4.4 电磁波在介质表面的反射和折射

我们已经知道,在国际单位制下,均匀线性介质中的电磁场方程与真空中的方程有相同的形式. 差别仅在于用介质的介电常数 ε 及磁导率 μ 相应地代替了 ε_0 和 μ_0. 前面已讨论了真空中的平面电磁波的性质. 只要作了同样的替换,这些性质对介质中相应的波也都是有效的. 介质中的波动方程是

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0, \tag{4.4.1}$$

相应的平面波解仍可写成

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)}, \tag{4.4.2}$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)}. \tag{4.4.3}$$

我们应记住几点值得注意的差别. 首先,波的相速度变为

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0\mu_0}{\varepsilon\mu}}c, \tag{4.4.4}$$

$\varepsilon/\varepsilon_0$ 是相对介电常数,它总是大于 1 的. 对于光波,相对磁导率 μ/μ_0 几乎是 1. 因而介质中波的相速 v 小于 c. 此外,k 和 ω 的关系为

$$k = \sqrt{\varepsilon\mu}\omega = \omega/v. \tag{4.4.5}$$

电波与磁波的关系为

$$\boldsymbol{B} = \sqrt{\varepsilon\mu}\, \boldsymbol{e}(\boldsymbol{k}) \times \boldsymbol{E} = \frac{1}{v} \boldsymbol{e}(\boldsymbol{k}) \times \boldsymbol{E}. \tag{4.4.6}$$

由此进一步引申出来的差别不再列出.

下面讨论电磁波在介质表面的反射和折射问题.

设以 $z=0$ 平面为界,上方充满着介电常数为 ε、磁导率为 μ 的均匀介质,下方介质的相应常数则为 ε' 和 μ'(图 4.4). 因一般的波可分解为平面波的叠加,所以我们只考虑平面的入射行波. 不难证明,它的反射波和折射波只能是同频率的平面行波.

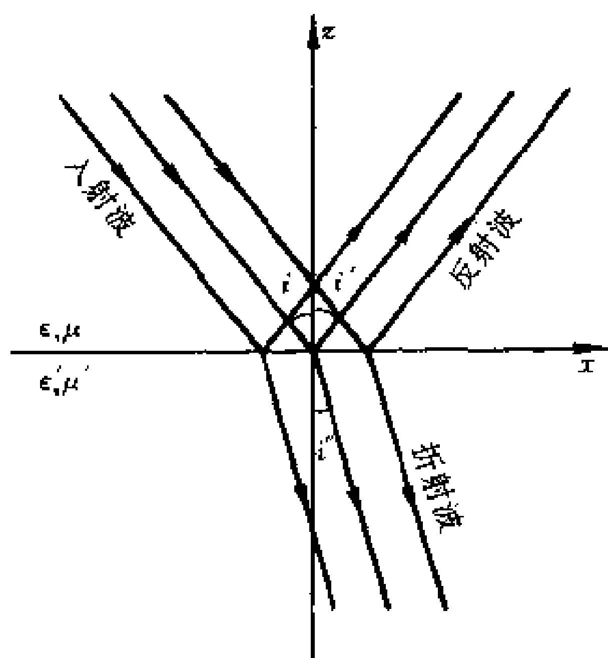


图 4.4 波的反射与折射

我们把斜向入射的平面波(在上半空间)记作

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}, \tag{4.4.7}$$

$$\boldsymbol{B} = \sqrt{\varepsilon\mu}\, \boldsymbol{e}(\boldsymbol{k}) \times \boldsymbol{E}, \tag{4.4.8}$$

其中

$$\boldsymbol{k} = (k_x, 0, k_z), \quad k_z < 0. \tag{4.4.9}$$

入射波的有关参量都当作已知量. 在界面上,波将被反射和折射. 折射波(在下半空间)记作

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}_0' \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}-\omega' t)}, \tag{4.4.10}$$

$$\boldsymbol{B}' = \sqrt{\varepsilon'\mu'}\, \boldsymbol{e}(\boldsymbol{k}') \times \boldsymbol{E}'. \tag{4.4.11}$$

类似地，把反射波（也在上半空间）记作

$$\boldsymbol{E}'' = \boldsymbol{E}_0'' \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}''\cdot\boldsymbol{r}-\omega''t)}, \tag{4.4.12}$$

$$\boldsymbol{B}'' = \sqrt{\varepsilon\mu}\, \boldsymbol{e}(\boldsymbol{k}'') \times \boldsymbol{E}''. \tag{4.4.13}$$

这两种波的参量都须按界面上的电磁规律，由入射波定出.

在 $z=0$ 的界面上，这三种波应满足 1.9 节中导出的边界连接条件. 例如具体写出 E_x 的连续方程，它是

$$E_{0x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_x x-\omega t)} + E''_{0x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k''_x x+k''_y y-\omega'' t)} = E'_{0x}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k'_x x+k'_y y-\omega' t)}. \tag{4.4.14}$$

这方程须在任意时刻 t，对任意 x 和 y 都成立. 由这要求给出

$$\omega' = \omega'' = \omega, \tag{4.4.15}$$

$$k_x' = k_x'' = k_x, \tag{4.4.16}$$

$$k_y' = k_y'' = 0. \tag{4.4.17}$$

这些关系式把反射波和折射波的频率，波长和传播方向都确定了下来. (4.4.15)式表明，波的反射和折射不会改变原入射波的频率. (4.4.16)和(4.4.17)则告诉我们波的传播方向和波长的变化.

先看反射波. 它与入射波处在同一介质中，因此频率与波速相同保证了波长也相同(参看(4.4.5)). 由于

$$k_x''^2 + k_z''^2 = k_x^2 + k_z^2, \tag{4.4.18}$$

以及 $k_x''=k_x$，推知反射波矢的 z 分量必与原入射波矢的 z 分量反号，即 $k_z''=-k_z$. 这正是光学中熟知的反射定律：入射角与反射角相等.

对于折射波，由于它与入射波处在不同的介质中，同样的频率必对应不同的波长. 按(4.4.5)，两种波长(或波数)之比为

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{k}{k'} = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon'\mu'}}, \tag{4.4.19}$$

把介质的折射率 n 定义为

$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}}, \tag{4.4.20}$$

于是折射波与入射波的波长关系表成

$$n\lambda = n'\lambda'. \tag{4.4.21}$$

同时导出折射角和入射角的关系为

$$n \sin i = n' \sin i' \tag{4.4.22}$$

其中

$$\sin i = k_x/k, \tag{4.4.23}$$

$$\sin i' = k'_x/k'. \tag{4.4.24}$$

这些是光学中熟知的折射规律.

然后我们讨论反射波和折射波的强度. 为此须用到全部的边界连接条件. 上面的分析已说明,这三个波的相因子必定相等,从而可消去. 余下是复振幅满足的代数方程,

由 $E_{/\!/}$ 连续: $(\boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{E}_0''-\boldsymbol{E}_0')\times\boldsymbol{n}=0$, (4.4.25)

由 $D_\perp$ 连续: $(\epsilon\boldsymbol{E}_0+\epsilon\boldsymbol{E}_0''-\epsilon\boldsymbol{E}_0')\cdot\boldsymbol{n}=0$, (4.4.26)

由 $B_\perp$ 连续: $(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{k}''\times\boldsymbol{E}_0''-\boldsymbol{k}'\times\boldsymbol{E}_0')\cdot\boldsymbol{n}=0$, (4.4.27)

由 $H_{/\!/}$ 连续: $\left(\frac{1}{\mu}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0+\frac{1}{\mu}\boldsymbol{k}''\times\boldsymbol{E}_0''-\frac{1}{\mu'}\boldsymbol{k}'\times\boldsymbol{E}_0'\right)\times\boldsymbol{n}=0.$

(4.4.28)

这里已利用了电波与磁波的关系(4.4.6). 原则上,这组代数方程足以让我们解出折射波的(复)振幅 $\boldsymbol{E}_0'$ 和反射波的(复)振幅 $\boldsymbol{E}_0''$,为了意义清楚,我们分别讨论入射波为垂直线偏振或平行线偏振的情形.

垂直线偏振指 $\boldsymbol{E}$ 的方向与 $\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{e}_z$ 平面相垂直. 容易由上述方程组看出,这时反射波和折射波也将是垂直的线偏振波. 略去介质的磁导率 μ 与 μ_0 的差别,我们解得

$$\text{折射波:}\quad \frac{E_0'}{E_0}=\frac{2n\cos i}{n\cos i+n'\cos i'}, \tag{4.4.29}$$

$$\text{反射波:}\quad \frac{E_0''}{E_0}=\frac{n\cos i-n'\cos i'}{n\cos i+n'\cos i'}=-\frac{\sin(i-i')}{\sin(i+i')}. \tag{4.4.30}$$

由折射定律知,其中的 $\cos i'$ 满足

$$n'\cos i' = \sqrt{n'^2 - n^2\sin^2 i}. \tag{4.4.31}$$

平行线偏振指 $\boldsymbol{E}$ 在 $\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{e}_z$ 平面上. 同样,这时反射和折射波也是平行线偏振波. 相应地解出(复)振幅比为

$$\text{折射波:}\quad \frac{E_0'}{E_0} = \frac{2n\cos i}{n'\cos i + n\cos i'}, \tag{4.4.32}$$

$$\text{反射波:}\quad \frac{E_0''}{E_0} = \frac{n'\cos i - n\cos i'}{n'\cos i + n\cos i'} = \frac{\tan(i - i')}{\tan(i + i')}. \tag{4.4.33}$$

上述这些公式在光学中叫费涅耳公式. 用麦克斯韦电磁理论能导出这种光学公式,曾被人们看作证认光波为电磁波的重要根据. 下面我们用它来讨论几个光学现象.

1. 反射波的半波损失

上面解出的复振幅比是实数. 若比值为正,表明从入射过渡到反射或折射时相位没有跳变. 若比值为负,则说明相位在界面上有突变(注意 $-1=e^{i\cdot\pi}$)后者叫半波损失,它是光学中知道的现象. 从上面的解式看到,折射波不会有半波损失. 只有垂直偏振的波从光疏介质向光密介质入射(即 $n'>n$)时,其反射波才会有半波损失.

2. 平行偏振的反射波的消失

看平行偏振波的反射波幅(参看(4.4.33)式)

$$\frac{E_0''}{E_0} = \frac{\tan(i - i')}{\tan(i + i')}. \tag{4.4.34}$$

对某个特殊的入射角 i_B,它正好满足 $i_B + i' = \pi/2$,则相应地有 $\boldsymbol{E}_0''=0$. 这情况下反射波将不出现. 这样的入射角 i_B 称为布儒斯特角. 引用折射定律,可求出

$$\tan i_B = n'/n, \tag{4.4.35}$$

它取决于两种介质的相对折射率. 例如从空气射向玻璃,$n'/n=1.5$,相应的布儒斯特角为 56°. 当平行偏振光按布儒斯特角入射,

它将不产生反射波.

3. 从光密介质到光疏介质的全反射

当光从光密介质射向光疏介质(即 $n>n'$),则 $i'>i$. 考虑到折射角的最大值为 $\pi/2$,入射角就会有一个上限. 它满足

$$\sin i_{\max} = n'/n. \tag{4.4.36}$$

让我们讨论一下,在入射角超过这上限时会发生什么. 注意由(4.4.24)定义的折射角失去意义时,折射定律依然是成立的. 它应写成(参看(4.4.22)~(4.4.24))

$$n \sin i = nk_x/k = n'k_x'/k'. \tag{4.4.37}$$

这关系式告诉我们,当 $i>i_{\max}$ 时有 $k_x'>k'$. 而由于 $k'^2=k_x'^2+k_z'^2$,因此 k_z' 为虚数. 令 $k_z'=\mathrm{i}\tau$,折射波的形式是

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}_0'\mathrm{e}^{-\tau z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_x x-\omega t)}. \tag{4.4.38}$$

从这里看出,光疏介质中的电磁波将沿介质表面传播,而波幅向内迅速衰减. 再看这情况下的反射波. 首先反射定律 $i=i''$ 仍成立. 再由(4.4.30)或(4.4.33)知(注意 $\cos i'=k_z'/k'$ 为虚数),这时 $|E''|/|E|=1$,即反射波的(实)振幅与入射波相同. 因此入射角 $i>i_{\max}$ 时所出现的是全反射现象.

4.5 导电介质中的电磁波

电磁波在导体中的行为与在不导电介质中很不一样,其原因是电波在导体内会引起传导电流. 传导电流要产生焦耳热,它消耗了电磁波的能量,从而使波在导体内出现阻尼. 让我们按麦克斯韦方程来考察导体中变化电磁场的一般形态.

在导体中,麦克斯韦方程的形式为

$$\nabla\cdot \boldsymbol{E} = 0, \tag{4.5.1}$$

$$\nabla\times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{4.5.2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \tag{4.5.3}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu\sigma\boldsymbol{E} + \varepsilon\mu\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \tag{4.5.4}$$

其中已利用欧姆定律，把传导电流写成了 $\sigma\boldsymbol{E}$.

这里解释一下在(4.5.1)式中没有把电荷分布项写上的原因. 由 $\nabla \cdot \boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon$ 及 $\boldsymbol{j}=\sigma\boldsymbol{E}$，导致 ρ 和 j 有关系

$$\nabla \cdot \boldsymbol{j} = \frac{\sigma}{\varepsilon}\rho. \tag{4.5.5}$$

再结合电荷守恒方程 $\nabla \cdot \boldsymbol{j}=-\frac{\partial \rho}{\partial t}$，我们看到电荷密度 ρ 应满足微分方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\sigma}{\varepsilon}\rho. \tag{4.5.6}$$

若开始($t=0$)时有电荷分布 $\rho_0(\boldsymbol{r})$，解(4.5.6)得出

$$\rho = \rho_0(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}, \tag{4.5.7}$$

它说明这电荷分布将会指数地衰减. 对良导体例如银，其电导率 $\sigma=6\times10^7\Omega^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-1}$. 把相对介电常数 $\varepsilon/\varepsilon_0$ 估作 1，则相应的衰减时间常数为 10^{-18} s. 因此我们认为导体内的电荷密度总会很快地消失的.

用(4.5.1) (4.5.2)及(4.5.4)同样可导出波动方程. 它有形式

$$\nabla^2\boldsymbol{E} - \mu\sigma\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0. \tag{4.5.8}$$

如所预料，这是一个带阻尼的波动方程，阻尼项来自电场引起的传导电流. 相应的磁波仍可用(4.5.2)由电波定出. 磁波和电波的性质应是一样的.

有阻尼的波动方程(4.5.8)的特解仍可写作

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}. \tag{4.5.9}$$

代回方程知，其中 $\boldsymbol{k}$ 和 ω 的关系为

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \varepsilon\mu\omega^2 + \mathrm{i}\mu\sigma\omega. \tag{4.5.10}$$

这是一个复式的代数关系，它说明 ω 和 $\boldsymbol{k}$ 的分量至少有一个是复数，ω 为复数或 $\boldsymbol{k}$ 为复数体现了波的两种不同的阻尼方式.

若 $t=0$ 时导体内有一个扰动电场 $\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})$. 对它作傅氏展开，

$$\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) = \iiint \boldsymbol{\epsilon}_0(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}, \tag{4.5.11}$$

其中每个傅氏分量的 $\boldsymbol{k}$ 都是实数. 按叠加原理，扰动电场的任一傅氏分量都服从波动方程，因此都按(4.5.9)的形式变化. 由 $\boldsymbol{k}$ 和 ω 的关系式(4.5.10)推知，$\boldsymbol{k}$ 为实数则 ω 必为复数，且其虚部为负. 把 ω 写成

$$\omega = \omega_0 - \mathrm{i}\omega_1, \tag{4.5.12}$$

则电矢量有形式

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{\epsilon}_0\mathrm{e}^{-\omega_1 t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_0 t)}. \tag{4.5.13}$$

这说明波幅将随时间而衰减，扰动电场将被阻尼掉，电磁能则转化成了焦耳热.

若有电磁波从导体外射入导体，按上节同样的论据，穿入导体的波将保持原来入射前的频率，这频率当然是实数. 由(4.5.10)知，这时波矢 k 至少有一个分量为复数. 简单地看

$$k_x = 0, \quad k_y = 0, \quad k_z = k_0 + \mathrm{i}\tau \tag{4.5.14}$$

的情形，则电波有形式

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\tau z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0 z-\omega t)}, \tag{4.5.15}$$

它仍然是一个稳态的波，即任一点上的波幅并不随时间衰减. 从能量守恒讲，导体内的电磁能总在转化为焦耳热，因此这波的稳定是靠入射波提供能量而维持的. 在这种情况下，波的阻尼体现为波幅的空间衰减. 下面我们对这情况作些进一步的讨论.

设 $z>0$ 处为真空，而 $z<0$ 处为导电介质. 有电磁波沿 $-z$ 方向垂直射向导体的表面(图 4.5). 求表面的反射波和进入导体的透射波.

我们把这三个波记作

入射波： $$\boldsymbol{E}_{入} = \boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}, \tag{4.5.16}$$

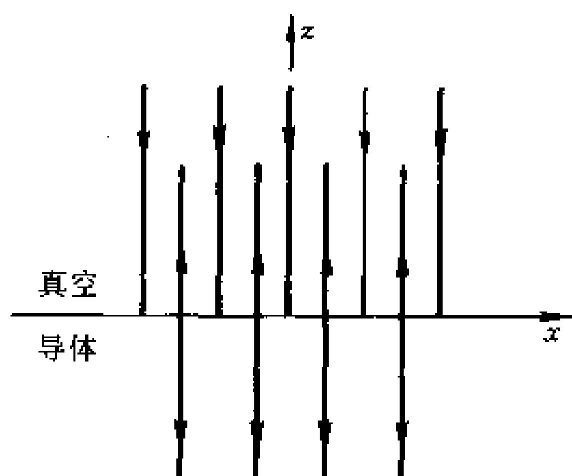


图 4.5 向导体表面垂直入射的波

透射波： $$\boldsymbol{E}_{透} = \boldsymbol{E}_0' e^{i(k'z-\omega' t)}, \tag{4.5.17}$$

反射波： $$\boldsymbol{E}_{反} = \boldsymbol{E}_0'' e^{i(k''z-\omega'' t)}. \tag{4.5.18}$$

与上节讨论所用的道理一样，为使 $z=0$ 面上时时满足边界连接条件，这三个波必须有相同的频率，即

$$\omega' = \omega'' = \omega. \tag{4.5.19}$$

反射波的性质很平常．我们主要关心进入导体的透射波．(4.5.19)说明透射波的频率是实数，因此它的波矢必为复数．在垂直入射的情况下，透射波的波矢 k 只有一个分量，它正是(4.5.14)的形式，即 $k'=k_0+i\tau$．k_0 描述透射波的传播，$1/\tau$ 则描述波在导体内的穿透深度(参看(4.5.15))．让(4.5.10)式两边的实部和虚部分别相等，就得到了由 ω 决定 k_0 和 τ 的关系

$$k_0^2 - \tau^2 = \varepsilon\mu\omega^2, \tag{4.5.20}$$

$$k_0\tau = \frac{1}{2}\mu\sigma\omega, \tag{4.5.21}$$

其中 ε 和 μ 是导体的介电常数和磁导率．(4.5.20)式说明 τ 总是比 k_0 小．下面分别讨论 $\tau \ll k_0$ 和 $\tau \approx k_0$ 的两种极端．它们相应于不良导体或良导体情形．

对比(4.5.20)和(4.5.21)，看出 $\tau \ll k_0$ 意味着

$$\sigma \ll 2\varepsilon\omega, \tag{4.5.22}$$

因此它被称为不良导体情形. 这时易于近似地解得

$$k_0 = \sqrt{\varepsilon\mu}\omega = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}}k, \tag{4.5.23}$$

$$\tau = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\sigma \ll \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}}k. \tag{4.5.24}$$

从这结果看,透入不良导体中的波的传播(由 k_0 和 ω 标志)与在相应的不导电介质中接近一样;介质的电导率不大(相对于 $2\varepsilon\omega$),使得波的透入深度(由 $1/\tau$ 标志)比波长大很多.

再看 $\tau \approx k_0$ 的情形. 这条件意味着 $k_0^2 - \tau^2 \ll k_0\tau$,即

$$\sigma \gg 2\varepsilon\omega, \tag{4.5.25}$$

因此是良导体情形. 单由(4.5.21)即可解得

$$k_0 = \tau = \sqrt{\frac{\mu\sigma\omega}{2}} \gg \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}}k. \tag{4.5.26}$$

这结果表明,波在良导体中传播时,波长比在相应不导电介质中的同频率波要短很多,同时波幅随空间衰减很快. 穿透深度 $1/\tau$ 与导体内的传播波长相接近,意味着波在良导体内的透入深度仅是波长的若干倍. 在更深的地方,波就几乎消失了.

下面计算反射波和透射波的波幅.

设入射的是 x 方向的线偏振波. 这情况下电场和磁场都只有平行表面的分量. 由 $E_{/\!/}$ 和 $H_{/\!/}$ 的边界连接条件给出

$$E_0 + E_0'' = E_0', \tag{4.5.27}$$

$$k(E_0 - E_0'') = k'E_0', \tag{4.5.28}$$

这里已用到了磁波与电波的关系和反射波的波矢 $k' = -k$,并忽略了 μ 与 μ_0 的差别. 易于从这两个连接条件解出反射波和透射波的复振幅,

反射波: $$\frac{E_0''}{E_0} = \frac{k' - k}{k' + k}, \tag{4.5.29}$$

透射波: $$\frac{E_0'}{E_0} = \frac{2k}{k' + k}. \tag{4.5.30}$$

由此看到，它们取决于透射波的复波矢 $k'=k_0+\mathrm{i}\tau$ 与入射波矢 k 之比. 我们讨论一下良导体情形.

由(4.5.26)知 $k'=k_0(1+\mathrm{i})$，因此

$$\frac{k'}{k}=\sqrt{2}\ \frac{k_0}{k}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}=\sqrt{\frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}. \tag{4.5.31}$$

代回(4.5.29)和(4.5.30)，得到良导体表面上的反射和透射复波幅的模为

$$\frac{|E_0''|}{|E_0|}=1, \tag{4.5.32}$$

$$\frac{|E_0'|}{|E_0|}=2\sqrt{\frac{\varepsilon_0\omega}{\sigma}}\ll 1, \tag{4.5.33}$$

这说明入射波几乎不能进入良导体，它几乎完全被导体的表面反射了. 这概念对简化处理导体对外界电磁波的影响很有用.

理论上把 $\sigma\to\infty$ 的导体叫理想导体. 由于波在理想导体内的穿透深度趋于零，且透射波幅也趋于零. 所以导体内部可认为没有电磁场存在. 这样使处理得到很大的简化. 导体表面的连接条件可相应写成

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}=\Sigma, \tag{4.5.34}$$

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}=0, \tag{4.5.35}$$

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}=0, \tag{4.5.36}$$

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{K}/\mu. \tag{4.5.37}$$

理想导体内没有电磁场，因此式中的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是导体表面外的电磁场. Σ 和 $\boldsymbol{K}$ 是导体表面的面电荷密度和面电流密度. 其中第二式表明导体面外的电场与表面垂直. 第一式说明理想导体能调节自己的面电荷密度，以保证面内电场为零. 第三式表明导体面外的磁场没有法向分量. 从第四式看，理想导体能调节其面电流密度，以保证面内的磁场为零. 当理论上对问题作简化处理时，人们常采用这样的边界连接条件.

4.6 微波在波导管内的传播

我们都知道,低频的电磁能是用导线输运的,高频的电磁能不能用导线输运. 对波长为厘米量级的电磁波(称微波),实际常用波导管来输运. 因此微波在波导管内如何传播的问题是有实用意义的问题. 当然,我们感兴趣的仅是问题的理论方面,即微波在波导管内的行为. 下面将限于讨论矩形的波导管. 它既是实际的,也是理论上简单的.

设有一个沿 z 方向放置的矩形金属管(图 4.6),其内壁尺寸为 $l_1 \times l_2$. 现在想知道电磁波怎样在管内传播.

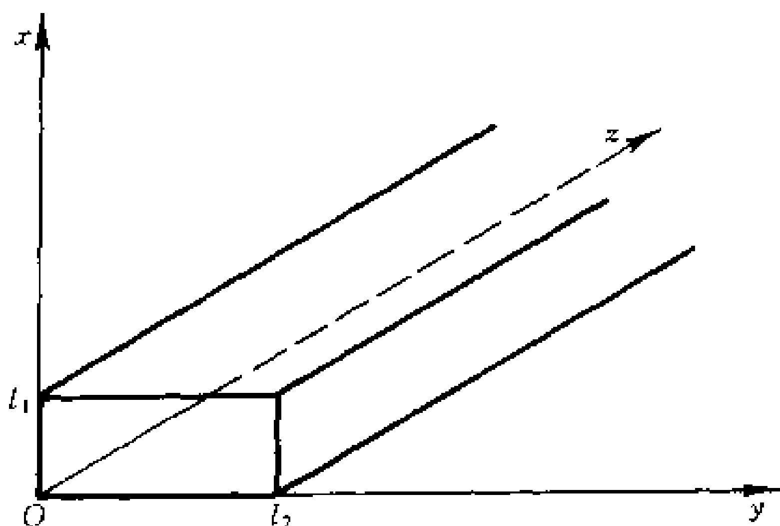


图 4.6 矩形的波导管

我们还是先看电波. 它满足的方程是

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0, \qquad (4.6.1)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0. \qquad (4.6.2)$$

设管壁是理想导体,则由边界连接条件知,电矢量的切向分量为零,即

$$E_y = E_z = 0 \quad (\text{在 } x = 0 \text{ 或 } l_1 \text{ 的面上}), \qquad (4.6.3)$$

$$E_x = E_z = 0 \quad (\text{在 } y = 0 \text{ 或 } l_2 \text{ 的面上}), \tag{4.6.4}$$

这些就是电波所必须满足的物理规律.

下面讨论怎样才能使频率为 ω 的波沿 z 方向行进. 我们一般地把电波写成

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0(x, y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)}, \tag{4.6.5}$$

为使波在管壁上能满足边条件,须让电波在 x 和 y 方向上形成驻波. 为此把 $\boldsymbol{E}_0$ 写成

$$E_{0x} = (\alpha_{x1}\cos k_x x + \alpha_{x2}\sin k_x x)(\beta_{x1}\cos k_y y + \beta_{x2}\sin k_y y), \tag{4.6.6}$$

$$E_{0y} = (\alpha_{y1}\cos k_x x + \alpha_{y2}\sin k_x x)(\beta_{y1}\cos k_y y + \beta_{y2}\sin k_y y), \tag{4.6.7}$$

$$E_{0z} = (\alpha_{z1}\cos k_x x + \alpha_{z2}\sin k_x x)(\beta_{z1}\cos k_y y + \beta_{z2}\sin k_y y), \tag{4.6.8}$$

这是平面波的叠加,所以必能满足波动方程,并由此定出

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega^2/c^2. \tag{4.6.9}$$

现在需要适当选取 k_x 和 k_y,使它在管壁上正好是波节. 这样上述边条件才被满足. 由 E_{0x}在 $y=0$ 及 l_2 处须为零,定出

$$\beta_{x2} = 0, \tag{4.6.10}$$

$$k_y = n\pi/l_2, \quad n = 0,1,2,\cdots, \tag{4.6.11}$$

同样由 E_{0y}在 $x=0$ 及 l_1 处须为零,又定出

$$\alpha_{y1} = 0, \tag{4.6.12}$$

$$k_x = m\pi/l_1, \quad m = 0,1,2,\cdots, \tag{4.6.13}$$

E_{0z}须在四个界面上都为零. 这除了要求 k_x 满足(4.6.13),k_y 满足(4.6.11)外,还定出

$$\alpha_{z1} = \beta_{z1} = 0. \tag{4.6.14}$$

这样,既满足波动方程又满足边条件的电波有了如下的形式

$$E_{0x} = (A_1\cos k_x x + A_2\sin k_x x)\sin k_y y, \tag{4.6.15}$$

$$E_{0y} = \sin k_x x(B_1\cos k_x x + B_2\sin k_y y), \tag{4.6.16}$$

$$E_{0z} = C_1 \sin k_x x \sin k_y y, \qquad (4.6.17)$$

其中 A_1, A_2, B_1, B_2 和 C_1 均为复常数.

此外还须要求电波满足横波性. 注意现在它不表现为 $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E}=0$. 把(4.6.15)～(4.6.17)代入横波性条件 $\nabla \cdot \boldsymbol{E}=0$,并要求它对管内任一点都成立,得出

$$A_2 = 0, \qquad (4.6.18)$$

$$B_2 = 0, \qquad (4.6.19)$$

$$A_1 k_x + B_1 k_y - \mathrm{i} C_1 k_z = 0. \qquad (4.6.20)$$

这样,我们就把金属管内的单频 z 向行波完全确定下来了. 它具有(4.6.5)的形式,相应的振幅为

$$E_{0x} = A_1 \cos k_x x \sin k_y y, \qquad (4.6.21)$$

$$E_{0y} = B_1 \sin k_x x \cos k_y y, \qquad (4.6.22)$$

$$E_{0z} = C_1 \sin k_x x \sin k_y y, \qquad (4.6.23)$$

其中 k_x 和 k_y 分别满足(4.6.13)和(4.6.11),A_1, B_1 和 C_1 满足横波条件(4.6.20).

在确定了电波后,相应的磁波可由

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = - \nabla \times \boldsymbol{E} \qquad (4.6.24)$$

来导出. 它的形式仍然是

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0(x, y) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)}. \qquad (4.6.25)$$

把上述电波解代入(4.6.24),对时间积分后得到磁波的振幅为

$$B_{0x} = \frac{1}{k}(B_1 k_z + \mathrm{i} C_1 k_y) \sin k_x x \cos k_y y, \qquad (4.6.26)$$

$$B_{0y} = \frac{1}{k}(A_1 k_z + \mathrm{i} C_1 k_x) \cos k_x x \sin k_y y, \qquad (4.6.27)$$

$$B_{0z} = \frac{\mathrm{i}}{k}(B_1 k_x - A_1 k_y) \cos k_x x \cos k_y y. \qquad (4.6.28)$$

容易验证,磁波的横波性条件和磁场边条件均已自动满足. 所以它就是我们所要的磁波解.

从上面的分析看到,当 ω 和 m, n 选定后,k_z 已由(4.6.9)确

定.剩下还有四个实参量.它们是满足(4.6.20)的两个任意复数.这四个参量描述了波的两个独立分量的振幅和相位.

这里同样可以引入两种基本波型作为基,使上面得到的一般解能表成它们的叠加.人们常把满足

$$C_1 = 0 \tag{4.6.29}$$

的波作为一种基本波型,而把满足

$$B_1 k_x = A_1 k_y \tag{4.6.30}$$

的波作为另一种基本波型.从(4.6.23)看,前一情况下的电波 z 分量为零,即电矢量与波的行进方向相垂直.因此它被称为横电型波,记作 TE 波.从(4.6.28)看,后一情况下的磁波 z 分量为零,即磁矢量与波的行进方向相垂直,所以叫横磁型波,记作 TM 波.显然,对确定的 ω 和 m,n,一般的波是 TE_{mn} 波和 TM_{mn} 波的叠加.

现在我们讨论波导管的尺寸和波频的关系.为使波能沿波导管行进,k_z 须为实数.由(4.6.9),(4.6.11)和(4.6.13),k_z 可写成

$$k_z = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{l_1}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{l_2}\right)^2}. \tag{4.6.31}$$

这样,为传输频率为 ω 的波,m 和 n 受到了限制.它们须满足

$$\left(\frac{m\pi}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{l_2}\right)^2 < \left(\frac{\omega}{c}\right)^2. \tag{4.6.32}$$

这说明频率为 ω 的波只能以有限的几种模式在管中传播.模式的种数与金属管的尺寸有关.这问题也可以反过来讲,对一定尺寸的波导管,它能输送的波的频率是有限制的.由于 m 和 n 不能都为零(否则波幅为零),所以能输送的最低频率为

$$\omega_{\min} = \frac{\pi c}{l}, \tag{4.6.33}$$

其中 l 是 l_1 和 l_2 中较大的数.若仍把 $\lambda=\frac{2\pi c}{\omega}$ 叫做波长,则波导管能输送的最大波长是 $2l$.实际波导管的尺寸是厘米的量级,所以输运的是厘米量级的波.

最后简单举一个例. 设波导管的尺寸为 3 cm×7 cm,则波长超过 14 cm 的波是不能输运的. 若波长在 7 cm 至 14 cm 间,它将只以 TE_{01} 型的波传播. 若波长为 5 cm,这波将以 TE_{01},TE_{10},TE_{11},TE_{02}和 TM_{11}等五种模式的叠加来传播. 注意 TM_{0n}或 TM_{m0}模式是不存在的.

第5章　电磁波的激发

5.1　电磁势及其方程式

定性地说，变化的电磁场必是由电荷分布和电流分布的变化所产生的．后者是前者的源．这一章我们讨论变化的电磁场对它的源的依赖关系．因此其出发点是真空中的麦克斯韦方程的一般形式，

$$\nabla\cdot \boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon_0, \tag{5.1.1}$$

$$\nabla\times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0, \tag{5.1.2}$$

$$\nabla\cdot \boldsymbol{B} = 0, \tag{5.1.3}$$

$$\nabla\times \boldsymbol{B} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \mu_0 \boldsymbol{j}, \tag{5.1.4}$$

其中的 ρ 和 $\boldsymbol{j}$ 应满足电荷守恒方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot \boldsymbol{j} = 0. \tag{5.1.5}$$

由于磁场 $\boldsymbol{B}$ 永远是无散场，因此总可以引入矢势 $\boldsymbol{A}$，使得

$$\boldsymbol{B} = \nabla\times \boldsymbol{A}. \tag{5.1.6}$$

代入(5.1.2)，看出 $\boldsymbol{E}+\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$ 是无旋场，所以相应地可引入标势 φ，使得

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \nabla\varphi. \tag{5.1.7}$$

这样的 $\boldsymbol{A}$ 与 φ 一起，被称为电磁势，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 完全由它们确定．

对确定的 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{E}$，电磁势的取法同样有不确定性．当用

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\psi \tag{5.1.8}$$

代替 $\boldsymbol{A}$,显然 $\boldsymbol{B}$ 保持不变. 变换中的 ψ 可以是任意函数. 为保持 $\boldsymbol{E}$ 也不变,标势 φ 须同时用 φ' 代替,φ' 应满足

$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t}. \tag{5.1.9}$$

变换式(5.1.8)和(5.1.9)称为电磁势的规范变换. 上面的论证说明了 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 在电磁势的任意规范变换下是不变的. 这样,人们就可以根据需要,对电磁势加上特定的限制. 这叫对电磁势取特定的规范.

让我们看电磁势应满足的微分方程. 在引用电磁势后,基本方程(5.1.2)和(5.1.3)已自动成立. 因此 $\boldsymbol{A}$ 和 φ 的方程应由(5.1.1)和(5.1.4)导出. 把电磁势的定义式(5.1.6)及(5.1.7)代入,立即得到

$$\nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) = -\rho/\varepsilon_0, \tag{5.1.10}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = -\mu_0 \boldsymbol{j}, \tag{5.1.11}$$

这就是 $\boldsymbol{A}$ 和 φ 所应满足的微分方程组.

不难证明,若 $\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} \neq 0$,总能找到一个规范变换,使变换后的电磁势满足

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \tag{5.1.12}$$

因此一般地可对电磁势加上限制条件(5.1.12),这叫洛伦兹规范下的电磁势. 在这规范条件下,$\boldsymbol{A}$ 与 φ 的方程简化成了

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\rho/\varepsilon_0, \tag{5.1.13}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \boldsymbol{j}. \tag{5.1.14}$$

洛伦兹规范使得 $\boldsymbol{A}$ 与 φ 分别满足有源的波动方程,这对于讨论电磁波的激发是方便的,因此本书将一直采用这种规范. 需要注意,

由(5.1.13)和(5.1.14)解出的 $\boldsymbol{A}$ 和 φ 须同时满足规范条件(5.1.12),它才是物理上所要的解.

另一种常用的规范条件是令 $\boldsymbol{A}$ 满足

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0, \tag{5.1.15}$$

这样,$\boldsymbol{A}$ 和 φ 的方程化为

$$\nabla^2\varphi=-\rho/\varepsilon_0, \tag{5.1.16}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\nabla\varphi}{\partial t}=-\mu_0\boldsymbol{j}. \tag{5.1.17}$$

在这种规范下,标势 φ 的方程与静电场方程一样. 因此它被称为库仑规范. 当解出标势 φ 后,代回(5.1.17)再解 $\boldsymbol{A}$. $\boldsymbol{A}$ 所满足的仍是有源的波动方程.

5.2 电磁势的推迟解

现在我们讨论,如果电荷分布 $\rho(r,t)$ 和电流分布 $\boldsymbol{j}(r,t)$ 为已知,相应地由它们所产生的电磁场是什么. 下面将采用洛伦兹规范来处理. 在这条件下,标势 φ 只依赖于电荷分布,而矢势 $\boldsymbol{A}$ 只依赖于电流分布,且 φ 和 $\boldsymbol{A}$ 所满足的微分方程有相同的数学形式. 因此我们只需要求解其中的一个就够了.

上节中已导出,标势 φ 满足有源的波动方程(5.1.11). 由线性偏微分方程的解的可叠加性,可以把电荷源分割成许多元部分而分别求解. 考虑位于 $\boldsymbol{r}'$ 处的源,并令它的电量为

$$Q(t)=\rho(r',t)\mathrm{d}\tau', \tag{5.2.1}$$

把它当作点源,则它的标势 φ 满足方程

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{1}{\varepsilon_0}Q(t)\delta(\boldsymbol{R}), \tag{5.2.2}$$

其中 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$. 显然点源所产生的场应是各向同性的. 为此把坐标原点移到这源点上(图5.1),并采用球坐标处理. 考虑到这标势 φ 与方向无关,它的方程简化为

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{1}{\varepsilon_0}Q(t)\delta(\boldsymbol{R}).\qquad(5.2.3)$$

为了下面的方便，这里把径向坐标记作 R，它是从源点指向场点的径矢.

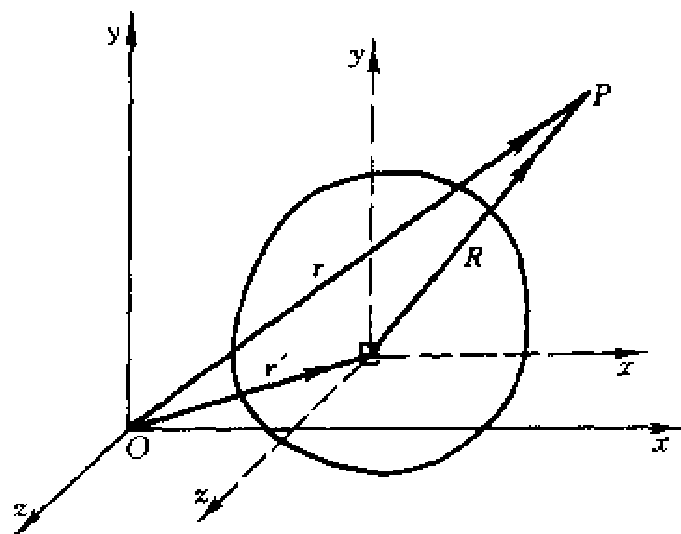


图 5.1 坐标系的取法

考虑到只在原点有源存在，φ 在 $R>0$ 处满足的是无源的波动方程，即(5.2.3)的右边为零. 令 $\varphi(R,t)=\chi(R,t)/R$，这无源的方程可用 χ 写成

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial R^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}=0,\qquad(5.2.4)$$

这是一个一维的波动方程. 它的通解是熟知的，即

$$\chi(R,t)=f(t-R/c)+g(t+R/c),\qquad(5.2.5)$$

其中 f 和 g 都是宗量的任意函数. 注意 f 是由中心向外传播的波，而 g 则是向中心汇聚的波. 我们要找的是由这点源所产生的波，因此只能要 f 形式的解. 代回到标势 φ，就有

$$\varphi(R,t)=f(t-R/c)/R.\qquad(5.2.6)$$

不管函数 f 取什么形式，这无源解都在 $R>0$ 处满足方程(5.2.3)，即方程(5.2.2). 函数 f 的具体形式正好需要由 $R=0$ 的行为来确定. 为此把(5.2.6)代入方程(5.2.2)，以期看清，f 须取

什么形式才能在 $R=0$ 处也满足它.

由于方程(5.2.2)的右边有 $\delta(R)$出现,它在 $R=0$ 处已不是正规的微分方程. 它只能在积分意义下来理解. 让我们取一个很小的 η,并在以 η 为半径的小球内对方程(5.2.2)两边作积分. 方程右边对 δ 函数积分后得到 $-Q(t)/\varepsilon_0$. 方程左边的积分有形式

$$\iiint_{R<\eta}\left(f\ \nabla^2\frac{1}{R}+2\ \nabla\frac{1}{R}\cdot\nabla f+\frac{1}{R}\ \nabla^2 f-\frac{1}{c^2R}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)\mathrm{d}\tau, \tag{5.2.7}$$

式中的 f 仍看作 $t-R/c$ 的任意函数. 当 $\eta\to0$,由于积分体积是 η^3 的量级,所以第三和第四项是 η^2 的量级,第二项是 η 的量级. 它们都趋于零. 于是只有第一项有贡献. 利用

$$\iiint\nabla^2\frac{1}{R}\mathrm{d}\tau=\oiint\nabla\frac{1}{R}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=-4\pi, \tag{5.2.8}$$

左边积分后得到 $-4\pi f(t)$. 把两边的结果等起来,就定出了函数 f 的形式,

$$f(t)=Q(t)/(4\pi\varepsilon_0). \tag{5.2.9}$$

用 $t-R/c$ 代替 t,得

$$f\left(t-\frac{R}{c}\right)=\frac{Q(t-R/c)}{4\pi\varepsilon_0}. \tag{5.2.10}$$

代回(5.2.6)得到

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q(t-R/c)}{R}, \tag{5.2.11}$$

它在 $R\geqslant0$ 的范围内处处满足方程(5.2.2),因此就是该元电荷所产生的标势.

按照叠加原理,对一切元电荷作积分,即可得出电荷源总体所产生的标势. 为此须回到原来的坐标系(图 5.1). 把该元电荷的位置用 $\boldsymbol{r}'$描述,$\boldsymbol{R}$ 仍代表 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$,然后再对 $\boldsymbol{r}'$ 作积分. 这样最终得到了

$$\varphi(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{\rho(\boldsymbol{r}',t-R/c)}{R}\mathrm{d}\tau', \tag{5.2.12}$$

它就是本问题所要寻求的解.

对于矢势 $\boldsymbol{A}$,由于它的每一个分量都与 φ 满足同样的数学方程,因此用同样的方法可得出

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t-R/c)}{R}\,\mathrm{d}\tau'. \qquad (5.2.13)$$

不难验证,这组解也满足洛伦兹规范条件. 因此它正是问题所求的解. 本章后面将讨论各类已知电荷和电流源所产生的电磁场. (5.2.12)和(5.2.13)式就是讨论这类问题的出发点.

下面对这组解的物理意义作一些说明.

(1) 当用这组解来计算 t 时刻 $\boldsymbol{r}$ 处的电磁势时,$\boldsymbol{r}'$ 处的电荷或电流源的贡献来自于它在 $t-R/c$ 时的密度,而不是在 t 时刻的密度. 这表明源对场的影响有一段时间的推迟. 这组解因此被称为推迟解. 推迟的时间间隔 R/c 是以光速 c 从 $\boldsymbol{r}'$ 处运动到 $\boldsymbol{r}$ 处所要的时间. 这结果告诉我们,电磁作用的传递不是瞬时的,而是以光速进行的. 这是一个重要的概念. 在电荷或电流的分布不随时间变化时,推迟解回复到静电或静磁的库仑解. 库仑定律曾误导人们把电磁作用当作是瞬时的,即把电磁作用的传递速度当做无穷大. 现在我们看到,这只是因为在静场问题中源在 t 时刻或 $t-R/c$ 时刻的密度没有差别,从而把推迟效应给掩盖了.

(2) 当源有分布时,t 时刻 $\boldsymbol{r}$ 处的电磁势是各部分源的贡献的总和. 由于推迟的时间间隔 R/c 与距离有关,因此离场点越远的源的贡献推迟得越多. 同一时刻同一点上的场强来自与不同时刻的源密度的贡献. 这是推迟效应的重要特征.

(3) 不难验证,如下的另一组解

$$\varphi(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{\rho(\boldsymbol{r}',t+R/c)}{R}\mathrm{d}\tau', \qquad (5.2.13)$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t+R/c)}{R}\,\mathrm{d}\tau', \qquad (5.2.14)$$

也能同样地满足波动方程和洛伦兹规范条件. 按这组解,t 时刻 $\boldsymbol{r}$ 处的场取决于 $\boldsymbol{r}'$ 处的源在 $t+R/c$ 时刻的密度. 因此这组解被称

为超前解．从因果关系看，$t+R/c$ 时的源密度不会影响 t 时刻的场，所以这超前解不是问题中的源所产生的场．从数学的角度讲，超前解可写成

$$\varphi_{超前} = \varphi_{推迟} + \varphi_0, \tag{5.2.15}$$

式中的 φ_0 满足无源的波动方程．它代表本问题之外的源所产生的电磁场．我们已论证，推迟解是本问题的源所产生的场．因此超前解是我们所感兴趣的场与其他场的叠加．归根到底，波动方程有无数个特解．本节的目的不是任意地找一个特解，我们是要找出一个解，它描述的正是已知源所产生的场．在这意义上，推迟解才是问题的答案．

5.3 谐振荡电流的电磁场

随时间变化的源或电磁场都可以按傅氏分析，分解为用不同频率作简谐振动的源或电磁场的叠加．下面将看到，频率为 ω 的谐振源必产生频率为 ω 的谐振场．因此讨论单频源产生的场不仅在理论上是简单的，而且是有实用意义的．

源和场的频率范围很宽．相应问题的物理内涵和处理方法也有很大的不同．低频源可用 50 Hz 的市用交流电为例．按这频率传播的电磁波的波长是 6000 km，实际感兴趣的场区常远小于一个波长的范围．在这情况下，场区内的相位差很小，即场的波动性并不重要．因此理论上常把它当似稳场处理．由于这类理论对电磁现象的物理研究不很有用，我们将不作讨论．高频场可用无线电波为例．广播或电视所用的频率约为 1～100 MHz，相应电磁波的波长是 3～300 m．在这类问题中，常被感兴趣的是远离波源处的电磁波与波源的关系．这就是我们下面要讨论的问题．值得指出，我们感兴趣于电磁辐射，主要不是因为它在技术上的实用性，而是由于它在各种物理现象的研究中有着广泛的应用．

让我们考虑一个有限区域内的单频谐振电流．它可表述为

$$j(r,t) = j_0(r)e^{-i\omega t}, \tag{5.3.1}$$

一般讲，这区域内相应会有变化的电荷密度

$$\rho(r,t) = \rho_0(r)e^{-i\omega t}. \tag{5.3.2}$$

由于电荷的守恒性，其中的 ρ_0 和 j_0 满足

$$i\omega\rho_0 = \nabla\cdot j_0. \tag{5.3.3}$$

从这式子看，变化的电荷密度可以是零．但一般它是随变化的电流密度同时存在的．下面我们来讨论这源在远处产生的电磁场．

按推迟势公式，单频谐振电流产生的矢势为

$$A(r,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\iiint \frac{j_0(r')e^{i\omega R/c}}{R}\,d\tau'\right)e^{-i\omega t}. \tag{5.3.4}$$

这式子首先说明，单频源产生的是同频的谐振场．我们感兴趣于场的辐射性质．为此我们主要讨论远处的场．把源的大小记作 d，令$k=2\pi/\lambda$为波矢的长度，则远处的含义指

$$r \gg d \quad 即 \quad r'/r \ll 1; \tag{5.3.5}$$

$$r \gg \lambda \quad 即 \quad kr \gg 1; \tag{5.3.6}$$

$$r \gg d^2/\lambda \quad 即 \quad kr'^2/r \ll 1. \tag{5.3.7}$$

这样可把(5.3.4)中与 $R(=|r-r'|)$有关的因子作泰勒展开．

先处理被积函数中的分母．展开得

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} + \frac{r'\cdot e_r}{r^2} + \cdots, \tag{5.3.8}$$

我们只保留与 r 的一次方成反比领头项．下节中将说明，与 r 的高次幂成反比的项不属于辐射场．此外有关的是相因子中的 $\omega R/c$，它是推迟效应的反映．利用 R 的展开式有

$$\omega R/c = kR = kr - k\cdot r' - \frac{(k\cdot r')^2 + k^2r'^2}{2kr} + \cdots, \tag{5.3.9}$$

其中 k 是球面波的波矢，即

$$k = ke_r. \tag{5.3.10}$$

展开式(5.3.9)中的首项 kr 是球面波的相因子，它已与积分无关．

第二项才是体现推迟效应的领头项. 按照上面规定的条件(5.3.7),第三项与第二项之比很小,所以从第三项起均略去. 于是远处的矢势化成

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{A}_0(\theta,\varphi)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}}{r} \tag{5.3.11}$$

的形式,其中

$$\boldsymbol{A}_0(\theta,\varphi) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \boldsymbol{j}_0(\boldsymbol{r}')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'}\mathrm{d}\tau'. \tag{5.3.12}$$

在同样的前提下,用同样的方法可导出远处标势为

$$\varphi(\boldsymbol{r},t) = \varphi_0(\theta,\varphi)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}}{r} \tag{5.3.13}$$

的形式,其中

$$\varphi_0(\theta,\varphi) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \rho_0(\boldsymbol{r}')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'}\mathrm{d}\tau'. \tag{5.3.14}$$

注意 $\rho_0(\boldsymbol{r}')$是被 $\boldsymbol{j}_0(\boldsymbol{r}')$ 决定的.

从(5.3.11)和(5.3.13)看出远处的电磁势有几点性质:(1)它们的等相面是球面,即源在远处产生的是球面波;(2) 这球面波是各向异性的,即在不同方向上有不同的振幅;(3) 球面波的波幅与距离 r 的一次方成反比. 这些性质对下一节讨论源的辐射性质是关键的. 在这之前,我们还需要由电磁势来算出电场强度和磁感应强度.

在由电磁势计算 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 时,先用 $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ 算磁感应强度较方便. 对于形如

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{F}_0(\theta,\varphi)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}}{r} \tag{5.3.15}$$

的球面波,若忽略与 r 平方成反比的项,则借助球坐标下的旋度运算可直截了当地证明

$$\nabla\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{i}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}). \tag{5.3.16}$$

按这道理,我们立即得到磁波的形式为

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{B}_0(\theta,\varphi)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}}{r}, \tag{5.3.17}$$

其中

$$\boldsymbol{B}_0 = \mathrm{i}\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{A}_0. \qquad (5.3.18)$$

电波当然可以用 $\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$来计算. 但在运算操作上用

$$\nabla\times \boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \qquad (5.3.19)$$

由磁波来推算电波要更方便. 容易看出电波也必有形式

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}_0(\theta,\varphi)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}}{r}. \qquad (5.3.20)$$

把(5.3.17)和(5.3.20)代入麦克斯韦方程(5.3.19),并利用远处适用的旋度运算公式(5.3.16),得到电波和磁波的关系

$$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{B} = \frac{-\omega}{c^2}\boldsymbol{E}. \qquad (5.3.21)$$

这关系可重写作

$$\boldsymbol{E} = c\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{e}_r. \qquad (5.3.22)$$

它表明电波完全由磁波确定,且球面电磁波的传播方向 $\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 及 $\boldsymbol{B}$ 的实部(即物理场)也构成两两正交的右手系.

值得把上面得到的结果小结一下. (1) 我们讨论的是局域单频电流源,单频的条件不是实质的,真正重要的前提是电流源的尺度较小和波长较短,这样我们才能讨论远处的场;(2) 上面证明了,源在远处产生的一定是各向异性的球面波,且其波幅与 r 成反比,电磁势是这样,电波与磁波也是这样;(3) 球面电磁波的传播方向是球坐标的径向,它作为横波,$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都与传播方向垂直,且它们相互也垂直.

有了这些结果,对于具体源所要计算的是波幅的各向异性因子 $\boldsymbol{E}_0(\theta,\varphi)$ 和 $\boldsymbol{B}_0(\theta,\varphi)$. 上面的推导给出了从源 $\boldsymbol{j}_0(\boldsymbol{r}')$ 计算 $\boldsymbol{A}_0(\theta,\varphi)$ 的公式(见(5.3.12)). 此后,$\boldsymbol{B}_0$ 可由 $\boldsymbol{A}_0$ 算出(见(5.3.18)). 而电波振幅 $\boldsymbol{E}_0$ 则可用(5.3.22)由磁波振幅 $\boldsymbol{B}_0$ 算出. 这样计算电波没有涉及电磁标势 φ,从而也不涉及电荷密度 ρ,但是电荷的影响已包括在内了.

5.4 辐射功率和角分布

上节已证明，局域源在远处产生的是球面电磁波. 磁波的形式是

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{B}_0(\theta,\varphi)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}}{r}. \tag{5.4.1}$$

电波与磁波有相同的形式，两者的关系为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=c\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{e}_r. \tag{5.4.2}$$

本节讨论这电磁波的能流. 上一章讨论平面波的能流时已指出，当对电磁波采用复数描述，能流密度公式须写成

$$\boldsymbol{S}=\frac{1}{\mu_0}(\mathrm{Re}\boldsymbol{E}\times\mathrm{Re}\boldsymbol{B}). \tag{5.4.3}$$

利用 Re$\boldsymbol{E}$,Re$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 构成两两正交的右手系，由(5.4.2)可把上式化成

$$\boldsymbol{S}=\frac{c}{\mu_0}(\mathrm{Re}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{Re}\boldsymbol{B})\boldsymbol{e}_r. \tag{5.4.4}$$

在单频条件下对能流作周期平均，复磁波 $\boldsymbol{B}$ 的实部平方与虚部平方有相同的平均值. 因而，平均能流 $\boldsymbol{S}$ 仍可用复磁波 $\boldsymbol{B}$ 表示成

$$\boldsymbol{S}=\frac{c}{2\mu_0}(\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{B}_0^*)\boldsymbol{e}_r, \tag{5.4.5}$$

这些公式与平面波的相应公式是一样的. 下面讨论球面波的特点.

用很大的 r 为半径作一个假想的球面. 单位时间流过这球面的能量是

$$P=\oint\!\!\!\oint \boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\frac{c}{2\mu_0}\iint(\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{B}_0^*)r^2\,\mathrm{d}\Omega, \tag{5.4.6}$$

把磁波(5.4.1)代入，注意其波幅与 r 的一次方成反比，得到

$$P=\frac{c}{2\mu_0}\iint(\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{B}_0^*)\mathrm{d}\Omega, \tag{5.4.7}$$

它是一个与 r 无关的量. 这结果表明这电磁波所携带的能量将一

直流至无穷远，这就是电磁辐射概念的要点.

从能量守恒讲，因这部分电磁波携带能量而无限远离谐振源，这源同时一定损失能量. (5.4.7)式所示的 P 就是源的能量损失率. 人们称它为源的辐射功率. 这是反映源的辐射特性的基本量. 此外，球面波的各向异性使它在不同方向上流出的能量不同. 在任一由 θ 和 φ 标志的方向上，单位立体角内的辐射功率为

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{c}{2\mu_0}\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{B}_0^*, \tag{5.4.8}$$

这叫辐射的角分布，它是由源的电流变化状况决定的. 不同源的辐射有不同的方向特性，因此测量角分布是推测源的性质的重要手段.

让我们回过来注意一下电磁波中被忽略的与 r^2 或更高次方成反比的项. 忽略的理由是清楚的. 它与所保留的领头项之比是 r'/r 或 λ/r 的量级，从而在远处可不计. 现在进一步看到，当我们仅感兴趣于携带能量而走向远处的波，那么由公式(5.4.6)看，仅有与 r 的一次方成反比的部分才有这性质. 因此人们把这部分场叫辐射场. 与 r 平方或更高次方成反比的场不能把能量无限地远送，或者说，它只使一部分场能在辐射源的附近流动. 因此那部分场被叫作源的自有场.

最后指出，前面的讨论都仅着眼于辐射场. 在远处，它是总场的主要部分. 当问题感兴趣于近处，即在源的尺度或波长若干倍范围内的电磁场，这时辐射场不是总场的主要部分，而自有场起重要作用. 上面的公式将不再适用. 因此在处理问题时必须注意源的大小和波长.

5.5 中心馈电的直天线

本节将通过一个简化的例子，以对辐射问题有较具体的了解. 借助天线来产生辐射是常用的. 以无线电波的辐射为例，若天线

的尺度及波长是 10 m 的量级．这时在 1 km 之外就符合了理论上的“远处”的要求．前面导出的公式就可适用了．

实际的天线辐射问题是一个边值问题．天线是导体，表面外部的电磁波与内部的电流由边界连接条件而相互制约．现在我们把它简化成内部电流为已知的问题．具体地设天线是长度为 d 的细金属棒，放置在垂直地面的 z 方向上．把它的中间断开，信号由振荡器发生后从中间馈入，如图 5.2 所示．电流在天线上形成驻

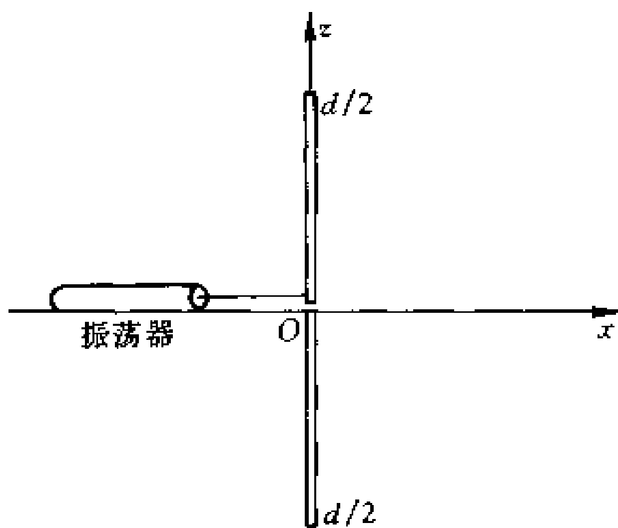


图 5.2 中心馈电的直天线

波，至两端降为零．再设信号是单频的．天线上的电流密度写成

$$j(r',t)=I(z')\delta(x')\delta(y')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}e_z, \qquad (5.5.1)$$

其中

$$I(z')=I_0\sin k\left(\frac{d}{2}-|z'|\right). \qquad (5.5.2)$$

我们在这样的简化前提下来讨论它的辐射功率和辐射的方向特性．

按 5.3 节的思路，先算出天线上的电流产生的矢势 $\boldsymbol{A}$．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_0&=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint j_0(\boldsymbol{r}')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'}\mathrm{d}\tau'\\&=\frac{\mu_0I_0}{4\pi}\int_{-d/2}^{d/2}\sin k\left(\frac{d}{2}-|z'|\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz'\cos\theta}\mathrm{d}z'\boldsymbol{e}_z.\end{aligned} \qquad (5.5.3)$$

积分后得到

$$A_0=\frac{\mu_0 I_0}{2\pi k}\left[\frac{\cos\left(\frac{kd}{2}\cos\theta\right)-\cos\frac{kd}{2}}{\sin^2\theta}\right]e_z, \qquad (5.5.4)$$

注意这里的 A_0 是实函数. 然后，用 $B_0=\mathrm{i}k\times A_0$ 算出

$$|B_0| = k|A_0|\sin\theta. \qquad (5.5.5)$$

于是按(5.4.8)，这种天线的辐射角分布就得到了. 它是

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{\mu_0 c I_0^2}{8\pi}\left[\frac{\cos\left(\frac{kd}{2}\cos\theta\right)-\cos\frac{kd}{2}}{\sin\theta}\right]^2. \qquad (5.5.6)$$

我们分别讨论一下短天线的情形和半波天线的情形.

短天线指天线长度远小于辐射波的波长，即 $kd\ll1$. 对小角度的余弦函数作泰勒展开，角分布函数可化成

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{\mu_0 I_0^2}{128\pi^2 c^3}\omega^4 d^4\sin^2\theta. \qquad (5.5.7)$$

这情况下，源在单位立体角内的辐射功率与 $\sin^2\theta$ 成正比. 沿天线方向(即 $\theta=0$ 或 π)的强度为零. 在垂直天线，即向前方向上的辐射最强. 对一切方向作积分，可得到总辐射功率

$$P=\frac{\mu_0 I_0^2}{48\pi c^3}\omega^4 d^4. \qquad (5.5.8)$$

值得注意的是总功率与频率的四次方成正比，它也与天线长度的四次方成正比. 从这结果看，加大天线的长度或电流的频率对提高功率是有利的. 但这里的前提是短天线，即 $d\ll\lambda$.

当用到 $d=\lambda/2$，即 $kd=\pi$. 这就是半波天线. 对于半波天线，由(5.5.6)推知相应的辐射角分布为

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{\mu_0 c I_0^2}{8\pi^2}\left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\right]^2, \qquad (5.5.9)$$

它的辐射的方向性与短天线情形很接近，也是向上为零，向前为主. 对一切方向作积分后得出的辐射功率是

$$P=1.22\,\frac{\mu_0 c I_0^2}{4\pi}. \qquad (5.5.10)$$

它已不再与天线长度或波长有关了.

5.6 电偶极辐射

讨论辐射问题时,我们只考虑远处的场,即 $r\gg\lambda$ 和 $r\gg d$,但不对源的尺度 d 和波长 λ 的相对大小提要求. 在很广泛的一类问题中,源的尺度远小于它的辐射波的波长

$$d\ll\lambda \quad 即 \quad kr'\ll 1. \tag{5.6.1}$$

这样条件(5.3.7)已自动满足,因此 5.3 节的结果可作为讨论的出发点. 按(5.3.11)和(5.3.12),辐射场的矢势为

$$\boldsymbol{A}(r,t)=\boldsymbol{A}_0(\theta,\varphi)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}}{r}, \tag{5.6.2}$$

其中

$$\boldsymbol{A}_0(\theta,\varphi)=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \boldsymbol{j}_0(\boldsymbol{r}')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'}\mathrm{d}\tau'. \tag{5.6.3}$$

现在我们对被积函数中的推迟因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'}$ 作泰勒展开,

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'}=1-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'+\cdots. \tag{5.6.4}$$

下面将看到,这相当于对辐射场作多极展开,其领头项就是本节要讨论的电偶极辐射,第二项是磁偶极和电四极辐射,将在下节中讨论.

对于辐射源,其多极矩的定义仍与以前用过的一样. 在单频振荡的情况下,它的偶极矩也作同频振荡,即有形式

$$\boldsymbol{p}(t)=\boldsymbol{p}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, \tag{5.6.5}$$

其振幅 $\boldsymbol{p}_0$ 由电荷分布的振幅 $\rho_0(\boldsymbol{r}')$ 决定,

$$\boldsymbol{p}_0=\iiint \rho_0(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{r}'\mathrm{d}\tau', \tag{5.6.7}$$

单频源的磁偶极矩或电四极矩也类似地有我们熟悉的形式,暂不写出.

回到矢势公式(5.6.3). 若按(5.6.4)展开,并只保留领头项的贡献,(5.6.3)式化成了

$$A_0(\theta,\varphi) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint j_0(r')\mathrm{d}\tau', \qquad (5.6.8)$$

利用附录中的公式(A1.28),有

$$\nabla' \cdot (j_0 r') = (\nabla' \cdot j_0)r' + (j \cdot \nabla')r'. \qquad (5.6.9)$$

由于电流源只存在于局域范围内,上式左边对全空间作体积分后是零. 再注意到 $\nabla' \cdot j_0(r') = \mathrm{i}\omega\rho_0(r')$,以及 $(j_0 \cdot \nabla')r' = j$,由(5.6.9)式给出

$$\iiint j_0(r')\mathrm{d}\tau' = -\mathrm{i}\omega\iiint \rho_0(r')r'\mathrm{d}\tau', \qquad (5.6.10)$$

按偶极矩振幅 p 的定义,(5.6.8)式化成了

$$A_0(\theta,\varphi) = -\mathrm{i}\frac{\mu_0}{4\pi}\omega p_0, \qquad (5.6.11)$$

这矢势只依赖于源的电偶极矩(确切地说,依赖于其电偶极矩的变率),所以被称为电偶极辐射. 完整地写出电偶极辐射的矢势,它是

$$A(r,t) = -\mathrm{i}\frac{\mu_0}{4\pi}\omega p_0\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}}{r}. \qquad (5.6.12)$$

算出了矢势,就可以按(5.3.18)导出其磁波

$$B(r,t) = \frac{\mu_0\omega}{4\pi}k \times p_0\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}}{r}, \qquad (5.6.13)$$

于是辐射的角分布(参照(5.4.8))为

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\mu_0\omega^4 p_0^2}{32\pi^2 c}\sin^2\theta, \qquad (5.6.14)$$

再对一切方向作积分,得出总辐射功率为

$$P = \frac{\mu_0\omega^4 p_0^2}{12\pi c}. \qquad (5.6.15)$$

通过上面的处理,我们把结论归纳为如下几点:

(1) 只要源的尺度 $d \ll \lambda$,它的辐射的主要部分是电偶极辐射. 这时辐射不与源电流 $j(r)$ 的全部细节有关,而只取决于其偶极矩的振幅 p_0. 上节讨论过的短天线辐射正是偶极辐射的例子. 若先

算出其源电流的偶极矩，结果是一样的.

(2) 偶极辐射的方向特征是$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}\propto\sin^2\theta$，其中 θ 角以 $\boldsymbol{p}_0$ 的方向为基准，在 $\theta=0$ 或 π 附近的小锥区内几乎没有辐射，$\theta=\pi/2$ 方向上的辐射相对最强，大部分方向上的辐射强度的差别不尖锐.

(3) 偶极辐射的总功率与 ω 的四次方成正比. 若源的振荡频率很低，它的辐射将不显著.

(4) 若振荡源的电偶极矩为零，则需要考虑展开式(5.6.4)中的第二项. 它就是下节要讨论的磁偶极和电四极辐射.

5.7 磁偶极辐射和电四极辐射

现在我们计算展开式(5.6.4)中第二项的贡献. 相应的矢势是

$$\boldsymbol{A}_0=-\mathrm{i}\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'\boldsymbol{j}_0(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau',\tag{5.7.1}$$

把被积函数中的并矢分解为对称或反对称的两部分，即

$$\boldsymbol{r}'\boldsymbol{j}_0=\frac{1}{2}(\boldsymbol{r}'\boldsymbol{j}_0-\boldsymbol{j}_0\boldsymbol{r}')+\frac{1}{2}(\boldsymbol{r}'\boldsymbol{j}_0+\boldsymbol{j}_0\boldsymbol{r}').\tag{5.7.2}$$

下面将看到，其中反对称部分是磁偶极辐射，而对称部分是电四极辐射.

先看反对称部分. 利用矢量的双叉乘公式

$$\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{j}_0)=-\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}'\boldsymbol{j}_0-\boldsymbol{j}_0\boldsymbol{r}').\tag{5.7.3}$$

这部分对矢势的贡献可写成是

$$\boldsymbol{A}_{0\,\mathrm{m2}}=\mathrm{i}\frac{\mu_0}{4\pi}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{m}_0,\tag{5.7.4}$$

其中 $\boldsymbol{m}_0$ 是源的磁偶极矩的振幅，即

$$\boldsymbol{m}_0=\frac{1}{2}\iiint\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{j}_0(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau',\tag{5.7.5}$$

因此这部分辐射是磁偶极辐射. 相应的磁波振幅是

$$\boldsymbol{B}_{0\,\mathrm{m2}}=-\frac{\mu_0}{4\pi}\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{m}_0).\tag{5.7.6}$$

在只有磁偶极辐射的情况下，磁波振幅的大小为

$$|\boldsymbol{B}_{0\,\mathrm{m}2}| = \frac{\mu_0 m_0 k^2}{4\pi}\sin\theta, \tag{5.7.7}$$

其中 θ 角以 $\boldsymbol{m}_0$ 的方向为基准．由此易于得出它的辐射角分布和总功率

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c^3}\sin^2\theta; \tag{5.7.8}$$

$$P = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{12\pi c^3}. \tag{5.7.9}$$

这些结果与电偶极辐射的公式很类似，只是用磁矩代替了电矩（用 m_0 代 $p_0 c$）．应该记住，纯磁偶极辐射的强度也与 $\omega^4\sin^2\theta$ 成正比．

然后看对称部分．它对辐射矢势的贡献为

$$\boldsymbol{A}_{0\,\mathrm{e}4} = -\mathrm{i}\frac{\mu_0}{8\pi}\boldsymbol{k}\cdot\iiint(\boldsymbol{r}'\boldsymbol{j}_0 + \boldsymbol{j}_0\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'. \tag{5.7.10}$$

下面证明，这矢势仅与源的四极矩有关，因此是电四极辐射．

为此造一个三重并矢 $\boldsymbol{j}_0\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'$，它的全散度可展开成

$$\begin{aligned}\nabla'\cdot(\boldsymbol{j}_0\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}') &= (\nabla'\cdot\boldsymbol{j}_0)\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}' + (\boldsymbol{j}_0\cdot\nabla'\boldsymbol{r}')\boldsymbol{r}' + \boldsymbol{r}'\boldsymbol{j}_0\cdot\nabla'\boldsymbol{r}' \\ &= \mathrm{i}\omega\rho_0\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}' + \boldsymbol{j}_0\boldsymbol{r}' + \boldsymbol{r}'\boldsymbol{j}_0.\end{aligned} \tag{5.7.11}$$

同样由于源的局域性，这并矢的全散度的体积分为零．因此由上式两边积分后得到

$$\iiint(\boldsymbol{r}'\boldsymbol{j}_0 + \boldsymbol{j}_0\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau' = -\mathrm{i}\omega\iiint\rho_0\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'\mathrm{d}\tau'. \tag{5.7.12}$$

这样，(5.7.10)式重写为

$$\boldsymbol{A}_{0\,\mathrm{e}4} = -\frac{\mu_0 c k^2}{8\pi}\boldsymbol{e}_r\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{D}}_0, \tag{5.7.13}$$

其中

$$\overleftrightarrow{\mathscr{D}}_0 = \iiint\rho_0\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'\mathrm{d}\tau'. \tag{5.7.14}$$

我们看到，它仅与源的四极矩有关，因此叫电四极辐射．

注意电荷系统的电四极矩被定义为（参见(2.2.21)）

$$\overleftrightarrow{D}_0 = 3\overleftrightarrow{\mathscr{D}}_0 - \overleftrightarrow{I}\,\mathrm{tr}\overleftrightarrow{\mathscr{D}}_0. \tag{5.7.15}$$

矢势 A_{0e4} 的公式(5.7.13)可用源的电四极矩 $\overleftrightarrow{D}_0$ 表成

$$A_{0e4} = -\frac{\mu_0 ck^2}{24\pi}(e_r \cdot \overleftrightarrow{D}_0 - e_r \mathrm{tr}\overleftrightarrow{\mathscr{D}}_0). \tag{5.7.16}$$

由于其中第二项是一个纵场，它的旋度恒等于零，这项必能通过规范变换而消去. 于是我们最后把电四极辐射的矢势写成

$$A_{0e4} = -\frac{\mu_0 ck^2}{24\pi} e_r \cdot \overleftrightarrow{D}_0. \tag{5.7.16}$$

当仅有电四极辐射，它的辐射功率与角分布也易于算出. 先得出相应的磁波

$$B_{0e4} = -\frac{\mathrm{i}\mu_0\omega^3}{24\pi c^2} e_r \times (e_r \cdot \overleftrightarrow{D}_0). \tag{5.7.17}$$

于是就有了角分布

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\mu_0\omega}{1152\pi^2 c^3}|e_r \times (e_r \cdot \overleftrightarrow{D}_0)|^2. \tag{5.7.18}$$

从这式子看，电四极辐射的方向性比较复杂，它与 $\overleftrightarrow{D}_0$ 的哪些分量不为零有密切的关系，在此我们不作讨论. 在对方向作积分后，得出的功率公式不复杂，它是

$$P = \frac{\mu_0\omega^6}{1440\pi c^3}\overleftrightarrow{D}_0 : \overleftrightarrow{D}_0. \tag{5.7.19}$$

最后我们对辐射场的多极展开作一个小结.

(1) 在 $kr' \ll 1$ 的条件下，辐射矢势 A 按(5.6.4)展开成了级数，

$$A = A_{e2} + (A_{m2} + A_{e4}) + \cdots, \tag{5.7.20}$$

它的领头项是电偶极辐射. 展开的第二项是磁偶极和电四极辐射的叠加. 第三项没有讨论，它是磁四极和电八极辐射. 这就是辐射场的多极展开.

(2) 展开中后项与前项之比为 d/r 的量级. 当领头项不为零时，第二项将是小的修正. 它常可忽略. 当源的电偶极矩为零，则

磁偶极与电四极辐射起主要作用．这两种辐射的强度是同量级的，因此必须同时考虑．由于磁四极和电八极辐射更弱，它们一般没有考虑的价值．

（3）注意辐射功率涉及二次运算，其中有交叉项的贡献．因此，当电偶极辐射不为零而又要考虑高一级修正时，我们不能在角分布或功率公式上简单地加上磁偶极和电四极辐射的贡献．特别是当源的电偶极矩为零，我们必须先考虑源的磁偶极矩和电四极矩是否都不为零．若是这样，辐射功率和角分布中必须计及交叉项的贡献．仅当电四极矩为零时，我们才会观测到纯磁偶极辐射．反过来，也必须磁偶极矩为零时才能有纯电四极辐射．

第 6 章　狭义相对论基础

6.1　电磁学和相对性原理

爱因斯坦的狭义相对论是电磁学发展的产物，它论证了电磁学规律和力学规律一样，都在一切惯性系中成立．在这基础上，爱因斯坦断言，动的或静的惯性系在物理上完全不能区分．这思想被称为相对性原理．

动系与静系平等的思想最初来自伽里略．他当时的动机是维护日心说．在日心说和地心说的争论中，有一种对日心说的非难讲：若地球在很快地飞行，那么空气和飞鸟都应早就被地球甩掉了．伽里略对比地分析了停泊的或匀速航行的船上的若干假想实验，如水滴的自由下落，向不同方向抛物，等等．他指出在航行的船中，水滴将依然垂直下落，而不会偏向船尾；你向不同方向投抛物体，尽管物体飞行时船在行进，但你不会发现向船尾比向船头容易抛得更远．这种分析使伽里略得出结论：在船的两种情况下，你看到的现象不会有任何差别，因而你无法从任何现象来确定船是在正常地航行或是停在岸边．这是关于相对性原理的最早的论述．

如果在动系或静系中做同样的实验必然看到同样的结果，那么两种参考系中的物理规律应当一样．牛顿无疑理解这一点．他在他的著作《自然哲学的数学原理》中写下力学三定律时意识到，这些规律不会对一切参考系成立．因此他必须回答，它们在什么参考系中才适用．为了从哲理的高度回答这问题，牛顿引入了绝对空间和绝对时间的概念．他认为这才是力学三定律得以成立的基本参考系．在这基础上能够论证，若力学规律对绝对空间成立，那么对于在绝对空间中作匀速平动的参考系也一样成立．众所周

知，这类参考系现被统称为惯性系．动系和静系中有相同的规律．自然就有相同的现象．这结果为伽里略的思想奠定了力学的理论基础．在作这样的论证时，动系和静系间的时空关系须写成

$$x = X - vT, \tag{6.1.1}$$

$$y = Y, \tag{6.1.2}$$

$$z = Z, \tag{6.1.3}$$

$$t = T. \tag{6.1.4}$$

后人因此把它叫做伽里略变换．

麦克斯韦的电磁理论建立在1865年，变化电磁场的波动性是它的主要预言．很快人们认识到光波是服从麦克斯韦方程的电磁波．电磁辐射实验的成功，更促进人们相信，麦克斯韦方程是电磁学的普遍规律．这时从实用上和理论上都需要澄清一个问题：什么是麦克斯韦方程得以成立的基本参考系．人们通过研究发现，这远不是一个简单的问题．

设麦克斯韦方程在某基本参考系中成立，那么变化的电磁场必满足前两章中一再用到过的波动方程．若借助伽里略变换把这波动方程转换到一个以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动的参考系中，方程相应地变为

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{2}{c^2}\boldsymbol{v}\cdot\nabla\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{c^2}(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\right]\varphi = 0. \tag{6.1.5}$$

它与原来的波动方程并不一样．这说明若伽里略变换是对的，那么麦克斯韦方程不能对一切惯性系都成立．或者说，伽里略关于动系和静系平等的思想对电磁现象是不对的．麦克斯韦方程只对某一个特定的惯性系才成立．这样，力学现象不能区分惯性系是静的或动的，而电磁现象则能判定哪个是绝对静止的惯性系．

在当时，人们把电磁波看成和声波一样，是介质中振荡的传播．静介质和动介质中声波的行为不一样，因此波动方程只对静介质才适用．为此人们设想了一种介质叫以太，它充满了全空间．电磁波就是以太中的波．这样，认为麦克斯韦方程只在对以太静

止的参考系中成立是自然的．以太成了绝对空间概念的具体化．可是问题出在用上述理论去解释动介质中的光学现象时，却遇到了很多困难．

这里不想讨论一百年前的这段很曲折的历史，而只想指出导致以太概念被最终否定的一个重要因素．若确可用以太来作为绝对静止参考系，那么地球相对以太的速度应能用实验测定．但实际的测量却始终得到零结果．

到19世纪末，日心说和地心说之争早已结束了．人们已不会相信地球正好是相对以太静止的特殊星体．这样，如果麦克斯韦方程仅对静以太成立，那么它在地球表面必不能严格成立．地面上的电磁波的波速将不是麦克斯韦方程中的常数c，而应与地球对以太的速度v(叫地球的绝对速度)有关．人们自然期望通过地面上的光学实验来确定地球的绝对速度．一方面这样可以证实以太的存在，另一方面这对在地面上使用电磁规律也是重要的．按理论分析，地球运动对观测效应的影响是$(v/c)^2$的量级．这是一个很小的效应，但当时的干涉实验已能测量它了．1887年开始的迈克尔孙-莫雷实验就是为这个目的而设计的．地球绕太阳的公转速度约为30 km/s．不管太阳对以太的速度多大，在一年中，地球对以太的绝对速度总有超过30 km/s的时候．他们用实验精度保证，若地球的绝对速度超过30 km/s，就能通过干涉条纹的移动而测到它．可是他们的测量持续了几年，而所得到的却始终是零结果．这表明地球对以太的速度总比地球的公转速度还小．这构成了一个很困惑的问题．

当时许多人意识到，迈克尔孙-莫雷实验的零结果表明地面上的光速实际上仍是c，而不存在因地球的运动而带来的小偏离．难题在于地球相对以太必然在动，为什么光速不受影响？物理学家对此感到困惑莫解．按当时因循的思路，人们只能再赋予以太新的性质，以使这偏离不出现．那时以太已被赋予了不少自身难以解释的性质．1892年，洛伦兹与菲茨杰若又为此提出，相对以太

运动的物体会有长度缩短．若物体以速度 v 对以太运动，则它在运动方向上的长度将缩短一个因子 $\sqrt{1-v^2/c^2}$．这样，迈克尔孙-莫雷实验中的干涉条纹的移动就不会出现，测到的自然是零结果．但是这收缩的物理原因却无法解释．显然，这样解决问题使以太理论带有不令人满意的人为性．正是在这困境中，爱因斯坦的思路越出了因循的轨道，并使物理理论得到了突破性的进展．

爱因斯坦感到以太的概念不是必须的，即电磁波的传播并不一定需要一种介质．地面上的光速仍为 c 是麦克斯韦方程在地面上依然成立的迹象．当然不能认为地球是一个特殊优越的参考系．于是自然的猜想是电磁学与力学一样，它满足相对性原理．这样，不需要任何附加的假设，地球的绝对速度就是任何电磁实验所不能发现的．而与此同时，以太的概念必须被抛弃．这就是狭义相对论的观念．

以这样一个朴素的思想，把人们从越来越复杂的以太的迷雾中解脱了出来，这无疑是诱人的．然而要求麦克斯韦方程服从相对性原理绝不是一个平淡的要求，因为这样就必须否定伽里略变换．前面已说明，若伽里略变换一般地成立，那么电磁规律在不同惯性系中是无法相同的．但是伽里略变换在力学中是得到过考验的．它是否能否定？相应用什么来代替它？这都不是容易回答的问题．此外，在用新的变换代替伽里略变换后，牛顿力学规律是否仍能满足相对性原理也成了新问题．牛顿第二定律作为力学的基本规律，它在太阳系范围内得到过很好的证实．它能不能修改？答案也并不显然．无论如何，爱因斯坦克服了这些困难，并建立了狭义相对论．

狭义相对论指出各惯性系间的时空关系应当由洛伦兹变换描述，而伽利略变换仅是它的低速近似．为要求力学现象满足相对性原理，牛顿定律也只能是普遍力学规律的低速近似．因此，相对论的建立远不只是重新确立了伽里略早年的思想，更重要的是它加深了人们对时空的认识，并给物理学带来了新的变革．众所周

知，相对论和量子论一起，构成了 20 世纪蓬勃发展的物理学的两大基石.

我们将分两章来讨论狭义相对论的两方面内容. 本章着重讨论时空的物理本质及相对性原理的数学形式. 下一章将讨论相对论对宏观物理学的影响.

6.2 光速不变性和洛伦兹变换

如果麦克斯韦方程在两个相对地运动着的惯性系中都成立，那么两系中的光速都应是 c. 这结果显然与伽里略变换下的速度关系是冲突的. 狭义相对论把一切惯性系中的光速都是 c 作为基本假设，它被称为光速不变原理. 这样，伽里略变换自然将被否定. 由光速不变原理导出的时空关系被称为洛伦兹变换.

现在我们从基本原则出发，来重新考察时空变换应取什么形式的问题. 下面分几个层次来讨论.

1. 空间是均匀并各向同性的，时间是均匀的

这是一个先验的假定. 在这前提下，用数学能证明，作相对运动的两个惯性系 S 和 $\bar{S}$ 间的时空变换只能是线性变换，即它必有形式

$$\bar{t} = a_{00}t + a_{01}x + a_{02}y + a_{03}z, \tag{6.2.1}$$

$$\bar{x} = a_{10}t + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \tag{6.2.2}$$

$$\bar{y} = a_{20}t + a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \tag{6.2.3}$$

$$\bar{z} = a_{30}t + a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z. \tag{6.2.4}$$

这里仅为方便，令 $t=\bar{t}=0$ 时，两坐标架的原点相重合.

如果让两系的 x 轴均设在相对运动的方向上，并令两个 y 轴和两个 z 轴相互平行(图 6.1)，上述时空变换关系简化为

$$\bar{t} = \alpha t + \beta x, \tag{6.2.5}$$

$$\bar{x} = \gamma x + \delta t, \tag{6.2.6}$$

$$\bar{y}=y, \tag{6.2.7}$$

$$\bar{z}=z. \tag{6.2.8}$$

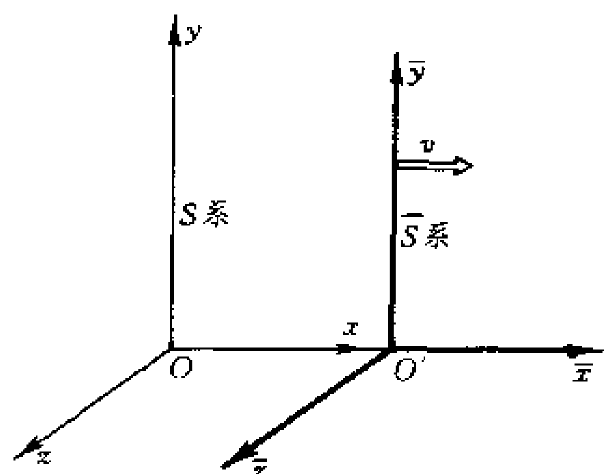


图 6.1 静系 S 和动系 $\bar{S}$

在我们写出上面的变换式时，略去了一些借助对称性而不难作出的论证. 这里只想强调，考虑到空间的均匀和各向同性及时间的均匀性，我们总能适当选取坐标，使两个相对作匀速运动的惯性系间的时空变换表成(6.2.5)～(6.2.8)的形式. 这变换式中只包含四个任意常数，它们被记作 α,β,γ 和 δ，四个系数都可与两系间的相对速率 v 有关.

2. 运动的相对性

设 $\bar{S}$ 系对 S 系的速度为 $\boldsymbol{v}$. 看 $\bar{S}$ 系中的静止点，即 $\mathrm{d}\bar{x}=\mathrm{d}\bar{y}=\mathrm{d}\bar{z}=0$. 它们对 S 系的速度都是 $\boldsymbol{v}$. 由上述变换式给出

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\frac{\delta}{\gamma}=v. \tag{6.2.9}$$

考虑到运动的相对性，S 系对 $\bar{S}$ 系的速度必为 $-\boldsymbol{v}$. 这时看 S 系中的静止点，即 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}y=\mathrm{d}z=0$. 这种点对 $\bar{S}$ 系的速度都是 $-\boldsymbol{v}$. 同样由上述变换式得到

$$\frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}\bar{t}}=\frac{\delta}{\beta}=-v. \tag{6.2.10}$$

这样，变换式进一步确定化了. 从运动的相对性定出了 $\beta=\gamma$，再

令 $\alpha=-\eta\gamma$,时空变换式可重写作

$$\bar{t}=\gamma(t-\eta x), \tag{6.2.11}$$

$$\bar{x}=\gamma(x-vt), \tag{6.2.12}$$

$$\bar{y}=y, \tag{6.2.13}$$

$$\bar{z}=z, \tag{6.2.14}$$

其中的相对速率 v 理解为已知量. 这里尚留下两个待定参量 γ 和 η.

值得注意的是,现在已没有更多的基本原则来限制变换的形式了. 如果先验地认为时间是与参考系无关的,即它是绝对的. 这意味着取 $\gamma=1,\eta=0$. 相应导出的就是伽里略变换. 由此可见,要否定伽里略时空变换,就是要抛弃绝对时间的概念.

3. 光速不变原理

现在引入了相对论的基本假设: 光的传播速率与参考系无关. 有了这个前提,与伽里略变换不同的新时空关系就完全确定了.

为利用光速不变原理,考虑在 $t=\bar{t}=0$ 时,从 S 和 $\bar{S}$ 系的公共原点放出的一个闪光. 在 S 系看到它的传播满足

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0. \tag{6.2.15}$$

而在 $\bar{S}$ 系看来,它的传播则满足

$$\bar{x}^2+\bar{y}^2+\bar{z}^2-c^2\bar{t}^2=0. \tag{6.2.16}$$

注意这里讨论的是从 S 或 $\bar{S}$ 系考察同一个光波.

看其中一个特定事件: S 系内 t 时光波到达 $x=ct,y=0,z=0$ 处. 同一事件在 $\bar{S}$ 系看来,时间发生在 $\bar{t}$,位置是 $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$. 由时空变换式(6.2.11)~(6.2.14)给出

$$\bar{t}=\gamma t(1-\eta c), \tag{6.2.17}$$

$$\bar{x}=\gamma t(c-v), \tag{6.2.18}$$

$$\bar{y}=y=0, \tag{6.2.19}$$

$$\bar{z}=z=0. \tag{6.2.20}$$

另外由光速不变性，$\bar{t},\bar{x},\bar{y},\bar{z}$ 必定满足(6.2.16)．把(6.2.17)～(6.2.20)代入，整理后得到

$$c - v = c(1 - \eta c), \tag{6.2.21}$$

这样就把 η 确定了下来，它是

$$\eta = v/c^2. \tag{6.2.22}$$

同理考察 S 系中 t 时光波到达 $x=z=0, y=ct$ 的事件．在 $\bar{S}$ 系看来，这事件发生在(参看(6.2.11))

$$\bar{t} = \gamma t \tag{6.2.23}$$

时，到达的位置(由(6.2.12)～(6.2.14))是

$$\bar{x} = -\gamma v t, \tag{6.2.24}$$

$$\bar{y} = y = ct, \tag{6.2.25}$$

$$\bar{z} = z = 0. \tag{6.2.26}$$

同样把它们代入(6.2.16)，又得出一个关系

$$\gamma^2 v^2 + c^2 = \gamma^2 c^2, \tag{6.2.27}$$

由此又把 γ 确定了下来，它是

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{6.2.28}$$

这样，时空变换式中的系数就完全被确定了．

我们看到，在服从时空和运动的一般原则的基础上，再加上光速不变性的要求后，一组新的时空变换关系出现了．它的形式是

$$\bar{t} = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{6.2.29}$$

$$\bar{x} = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{6.2.30}$$

$$\bar{y} = y, \tag{6.2.31}$$

$$\bar{z} = z. \tag{6.2.32}$$

这关系式已习惯地被称为洛伦兹变换，因为洛伦兹(1904)在以太理论的基础上曾为解释他提出的收缩假设而得到过同样的变换式．在一年后，爱因斯坦抛弃了以太观念．它被作为两个惯性系

间的时空变换而重新导出，并成了狭义相对论的基础.

由洛伦兹变换式易于看出，若两个惯性系间的相对速率远小于光速，则它以伽里略变换为近似. 这是一个非常重要的性质. 在相对论前的力学中，经验所涉及的速率都远小于光速. 在这经验范围内，牛顿力学和伽里略关系都是已被证明为可靠的. 洛伦兹变换的这一性质，保证了光速不变假设与过去的经验没有冲突. 虽然新理论的价值在于它会有新的预言，但与旧有的经验不相冲突也是至关重要的.

最后我们为使用的需要，写出相应的反变换式. 在应用上述变换时，我们把 S 系当作静止系，$\overline{S}$ 系相对它沿 x 方向以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动. 当我们需要从动系 $\overline{S}$ 往静系 S 作变换，只要考虑到 S 系的相对速度为 $-\boldsymbol{v}$，立即可写出反变换为

$$t = \frac{\bar{t} + v\bar{x}/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{6.2.33}$$

$$x = \frac{\bar{x} + v\bar{t}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{6.2.34}$$

$$y = \bar{y}, \tag{6.2.35}$$

$$z = \bar{z}. \tag{6.2.36}$$

当然，如果从正变换求解，其结果自然是一样的.

6.3 时空的物理性质

在相对论前的物理学中，时间是绝对的，它与参考系的运动无关. 正因为牛顿力学在实践上的成功，人们接受了时间绝对性的概念. 伽里略变换及由它引申出的速度转换关系都被认为是时空性质的自然体现. 但上节中已指出，按光速不变原理，时空性质应由惯性系间的洛伦兹变换来体现，而洛伦兹变换与时间绝对性的概念是冲突的. 伽里略变换或时间的绝对性只在低速下近似成立. 这样，我们的时空观念就需要改变. 本节的目的是以洛伦兹

变换为出发点，来重新认识时空．可以想到，它必定有很多性质是出乎我们意料的．

1．同时的相对性

按照洛伦兹变换，时间是与参考系有关的，而不是绝对的．因此从 S 系看是同时发生两个事件，在 $\bar{S}$ 系看来，两者的发生时间会有先后．反之亦然．这就是同时的相对性．

由于我们并不管事件的具体内容，而只关心事件发生的时间和地点，所以把确定的 t,x,y,z 称为一个事件，意指该时该地发生的某件事．假定有两个事件 P 和 Q，从 $\bar{S}$ 系看来是同时发生的，即 $\bar{t}_P=\bar{t}_Q$．由洛伦兹反变换可推出它们在 S 系中相应的发生时间．它们是

$$t_P = \gamma\left(\bar{t}_P + \frac{v}{c^2}\bar{x}_P\right), \tag{6.3.1}$$

$$t_Q = \gamma\left(\bar{t}_Q + \frac{v}{c^2}\bar{x}_Q\right). \tag{6.3.2}$$

从这里往后，我们将一直用 γ 代表 $\dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$，其中的 v 是两系间的相对速率．由这两式相减，得到从 S 系中看到的时间差为

$$t_Q - t_P = \gamma\,\frac{v}{c^2}(\bar{x}_Q - \bar{x}_P). \tag{6.3.3}$$

由此看出，仅对同地点发生的同时事件，才在另一惯性系中仍保持同时．若两事件的发生地点不同，如 $\bar{x}_Q>\bar{x}_P$，则从 S 系看来，事件 P 发生在事件 Q 之前．

同时的相对性是相对论性时空性质的最基本的特征．让我们更直观地理解它．

设一辆火车以速度 v 在行进．从火车的中点 M 处放一闪光（图 6.2）．以火车为参考系看，光到达车头和车尾当然是同时的．按(6.3.3)，从地面上作观测，光到车头比到车尾要晚．让我们分析其原因．

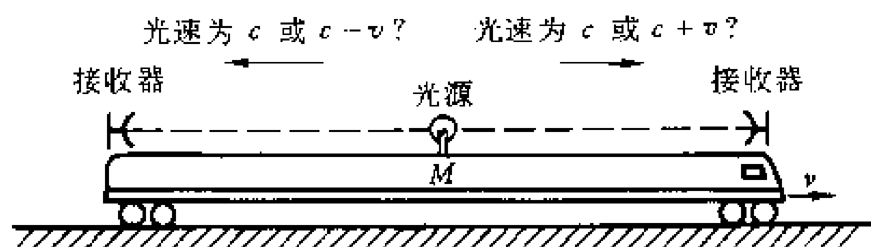


图 6.2　同时和不同时

以火车为参考系，光源是静止的. 光向前和向后的速率都是 c，因此光到达车头或车尾所需的传播时间都是 $t=l/c$，其中 l 是火车(静)长度的一半. 需要分析的是：当以地面为参考系，为什么由洛伦兹变换推断光到车头比车尾晚，而由伽里略变换推断两者依然同时？首先，由于火车在前进，光从火车中点到车头所走的距离比到车尾要长，这是没有疑问的. 分歧来自光速. 按光速的不变性，虽然光源对地面以速度 v 在前进，光向前或向后传播的速率依然是 c，这样自然导致闪光到达车头比到达车尾晚的推论. 若接受伽里略变换，由于光源有速度 v，闪光向前的传播速率是 $c+v$，而向后的速率是 $c-v$. 速率的差别弥补了距离的差别，结果推出闪光传到车头和车尾所用的时间依然一样，即光同时到达车头和车尾. 从这样的分析看到，同时的相对性直接是光速不变假设的后果.

2. 动尺的缩短

在任一个惯性系中，实验者都须按同样的原则来制造自己的参考系中为静止的标准米尺，并用它来刻度自己系中的坐标. 但是，一个惯性系中的静尺在另一惯性系看来则是动尺. 下面将证明，动标准尺的长度比静标准尺要短. 这是又一个常规经验之外的结果.

设一把沿 x 方向横放的标准尺以速度 v 相对于 S 系运动. 我们建立一个 $\bar{S}$ 系，使此尺在该系中为静止. 从 $\bar{S}$ 系看，这尺子两段

的横坐标为 $\bar{x}_P$ 和 $\bar{x}_Q$(Q 端在右侧)，因此尺子的长度为

$$L_0 = \bar{x}_Q - \bar{x}_P. \tag{6.3.4}$$

现在要问：在 S 系作测量，此动尺的长度多大？

为测量动尺的长度，必须"同时"记下此尺两端的横坐标，并以这两个坐标之差为它的长度. 设在 S 系中记下的坐标为 x_P 和 x_Q，它们与 $\bar{x}_P$ 和 $\bar{x}_Q$ 的关系可由洛伦兹变换得到. 这关系是

$$\bar{x}_P = \gamma(x_P - vt_P), \tag{6.3.5}$$

$$\bar{x}_Q = \gamma(x_Q - vt_Q), \tag{6.3.6}$$

测量两端坐标的时间必须相同，说明 $t_P = t_Q$. 利用这动尺在 S 系中的长度 $L = x_Q - x_P$，而它在静止时的原长 $L_0 = \bar{x}_Q - \bar{x}_P$，由上述关系式立即给出

$$L = L_0/\gamma, \tag{6.3.7}$$

注意到 γ 总大于 1，这公式表明运动尺子的长度缩短了.

这结果初看不仅是意外的，而且似乎有矛盾. 两系中用的标准尺在客观上是一样的，且双方都把对方的静尺看成动尺. 那么，到底谁缩短了？其实动尺的缩短是同时的相对性的直接后果.

在 S 系中测动尺的长度时，同时量其两端的坐标是必须的. 如果读右侧 Q 端坐标的时间偏晚，由于动尺的前进，结果就会错误得出偏大的长度. 正因为"同时"测量是要点，同时的相对性在这里就起作用了. 当从 S 系作测量，测量者只能按自己系的标准来同时地测量两端的坐标，而他测两端坐标的时间从别的参考系看一定是不同时的. 从随尺运动的参考系看来，因为那位静观测者把 Q 端坐标测早了(试证明)，所以他认为我的标准尺短了. 但对于他必须按他的标准同时地测两端的坐标，这是无可争议的. 因此说，动尺长度的缩短只能归之于同时的相对性的体现. 照这分析，把这效应称为动尺的"缩短"带有误导性，因为尺子在运动中并没有发生物理的收缩. 双方都认为对方的标准静尺有缩短，是因为双方有不同的同时标准. 这里也并没有矛盾.

3. 动钟的变慢

洛伦兹变换的另一类似的推论是运动的时钟要比静钟慢. 这里须同样说明,任一惯性系中的实验者须用同样的原理来制造静止的标准钟,并用它作为计时间的基准. 因此,各惯性系中的标准钟客观上是一样的.

让我们考虑一个运动中的标准钟. 同样让这标准钟相对 S 系以速度 v 沿 x 方向运动,而让它在 $\bar{S}$ 系中是一个静钟. 当钟显示的时间从 $\bar{t}_1$ 到 $\bar{t}_2$,$\bar{S}$ 系中时间过了 $T_0=\bar{t}_2-\bar{t}_1$. 令此钟显示 $\bar{t}_1$ 时 S 系中的时间为 t_1,而显示 $\bar{t}_2$ 时 S 系中的时间为 t_2. 按洛伦兹反变换,它们间的关系是

$$t_1 = \gamma\left(\bar{t}_1 + \frac{v}{c^2}\bar{x}_1\right), \tag{6.3.8}$$

$$t_2 = \gamma\left(\bar{t}_2 + \frac{v}{c^2}\bar{x}_2\right). \tag{6.3.9}$$

考虑到它在 $\bar{S}$ 系中为静钟,所以有 $\bar{x}_1=\bar{x}_2$. 这样就导出了两系中时间间隔的关系为

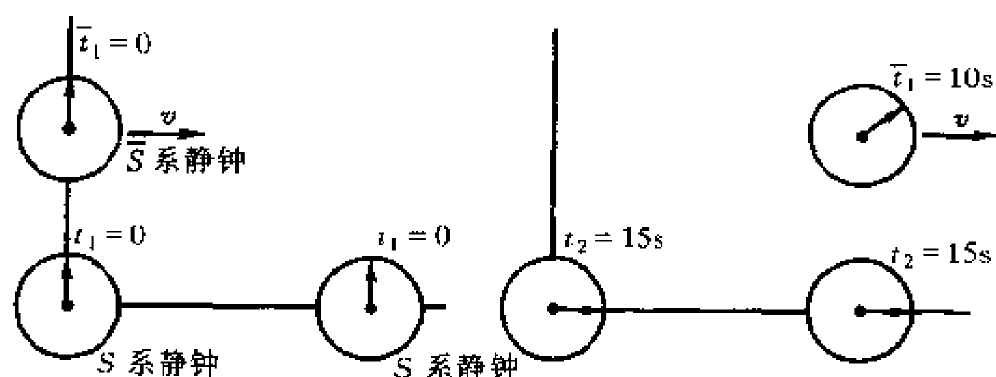
$$T = t_2 - t_1 = \gamma T_0. \tag{6.3.10}$$

这式子表明,在 S 系中测到的时间间隔 T 比动钟所示的间隔 T_0 要大,这就是我们要论证的动钟变慢.

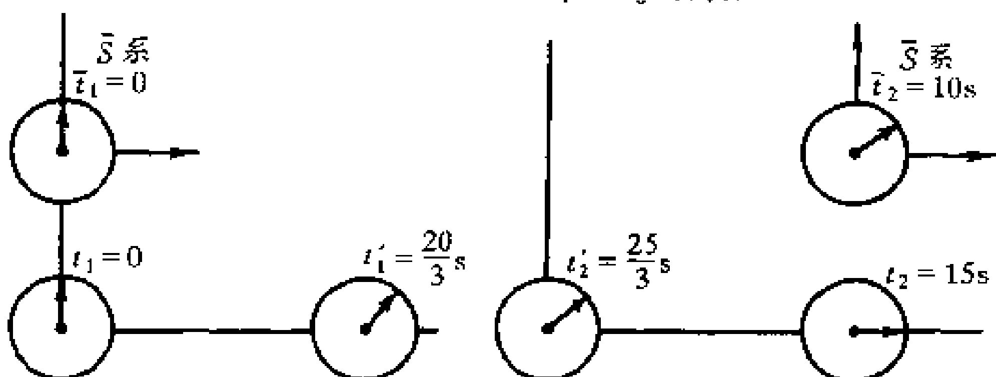
由于有动钟的变慢,因此任一惯性系中不同地方都只能用当地的静钟来计时. 这样就产生一个零点校准的问题,即同一时刻须使不同处的静钟有同一读数. 于是同时的相对性又起作用了:从别的参考系看,你的不同地方的计时标准钟没有对准.

让我们直观地分析 S 系的动钟变慢. $\bar{t}_1$ 时动钟在 S 系的 x_1 处,而 $\bar{t}_2$ 时它在 x_2 处(图 6.3). 在 S 系看来,这两处的钟是对准了的. 但从随钟运动的观测者看,它们并没有对准,且是在 x_2 处的标准钟快了(参看图 6.3,并试证明). 动钟变慢效应的全部症结就在这里. 因此同样,把这效应称为动钟的"变慢"并不恰当. 时

钟在运动中并没有物理的变化. 问题关键仍在同时的相对性.



(a)从 S 系看 $\bar{t}_1$ 和 $\bar{t}_2$ 时的钟



(b)从 $\bar{S}$ 系看 $\bar{t}_1$ 和 $\bar{t}_2$ 时的钟

图 6.3 动钟的变慢

在上面的分析中,时钟只是一种显示时间间隔的工具. 这效应并不仅与时钟有关,而其实对任何一个物理过程都有效. 如悬点静止的单摆摆动一周耗时为 T_0,那么从另一惯性系看,这悬点在动的单摆的周期将是 $T=\gamma T_0$. 以此类推,运动中的不稳定粒子的衰变将比静止时慢,运动体内的热扩散将比静止时慢等等. 这才是动钟变慢效应的物理内涵.

6.4 对洛伦兹变换的检验

从经验讲,洛伦兹变换预言的动尺缩短和动钟变慢几乎是不可思议的事. 但我们能理解,这是经验所涉及的速度太低的缘故.

无论如何，在高速情况下是否会出现这些效应是需要检验的．至今人类的技术尚不能使宏观物体获得接近 c 的高速，可是在高能实验室中，把微观粒子加速到接近光速早已不是困难的事．因此可以说，与尺缩和钟慢相关的现象在粒子实验室中是经常发生的．下面我们用一个例子来说明．

π^- 介子的静能量 E_0 为 0.14 GeV（$=1.4\times10^8$ eV）．现代加速器早已容易产生能量为 10 GeV 的 π^- 介子．下一章中将论证，这时它的速度 v 满足

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \frac{E}{E_0} = 71. \qquad (6.4.1)$$

由此算出 $v=(1-0.000\,098)c$．在如此接近光速的情况下，用 v 描述运动并不方便．人们常直接用 γ 来反映粒子运动的快慢．当 $\gamma\gg1$，它就是接近以光速运动的相对论性粒子．π^+ 介子是很快会衰变的不稳定粒子，其粒子数 N 的变化规律为

$$N = N_0 e^{-t/\tau}, \qquad (6.4.2)$$

其中 τ 被称为它的寿命．由实验测定，π^+ 介子在静止或低速运动时的寿命为 $\tau_0=2.56\times10^{-8}$ s.

按上节的说明，动钟的变慢意味着 π^+ 介子在高速飞行时的寿命将延长．当其速度为 v，寿命变为

$$\tau = \gamma\tau_0. \qquad (6.4.3)$$

在 γ 达到 71 时，寿命将延长至 $\tau=1.83\times10^{-6}$ s，这正是需要检验的事情．我们示意地提出如下的问题：在加速器某处产生了 N 个 $\gamma=71$ 的高速 π^- 介子，问它在飞过 6 m 长的管道后，粒子数尚剩多少？

先从地面参考系来分析．π^+ 介子按这速度飞行 6 m 所用的时间为 2.0×10^{-8} s．若没有寿命的变长，所剩的粒子百分数为

$$\frac{N}{N_0} = \exp\left(-\frac{2.0\times10^{-8}}{2.56\times10^{-8}}\right) = 46\%. \qquad (6.4.4)$$

按洛伦兹变换预言的寿命，所剩的粒子百分数应为

$$\frac{N}{N_0}=\exp\left(-\frac{2.0\times10^{-8}}{1.83\times10^{-6}}\right)=99\%,\qquad(6.4.5)$$

两个结果的差别很显著，因而完全可以用实验来鉴别. 从这意义上讲，动钟的变慢效应是已充分为实践所证实了的.

尺缩与钟慢本质上都是同时相对性的表现. 上述例子既是钟慢效应的证据，也可看成是尺缩效应的证据. 为此让我们从随 π^+ 介子飞行的 $\bar{S}$ 系来分析. 从 $\bar{S}$ 系看，π^+ 介子是静止的，因而其寿命为 $\tau_0=2.56\times10^{-8}$ s. 现在是那根 6 m 长的管道以速率 v 向 $-x$ 方向飞过. 若没有动尺的缩短，它飞过所用的时间仍为 2.0×10^{-8} s. 因此管道飞过后剩下的粒子百分数还是 46%. 考虑到相对论预言的尺缩，管道在 $\bar{S}$ 系中长度已缩至

$$L=L_0/\gamma=8.4\,\text{cm}.\qquad(6.4.6)$$

它飞过所用的时间相应地缩短为 $t=2.8\times10^{-10}$ s. 同样地计算飞过后剩下的粒子百分数，我们得到

$$\frac{N}{N_0}=\exp\left(-\frac{2.8\times10^{-10}}{2.56\times10^{-8}}\right)=99\%,\qquad(6.4.7)$$

这结果与(6.4.5)完全一致是意料之中的. 因为剩下多少粒子是可观测的事实，它不会与分析问题所用的参考系有关. 但是在换一种分析方法后，同样的实验成了对动尺缩短的检验了.

上面对检验的讨论是示意性的. 我们只想说明，虽然洛伦兹变换预言的尺缩和钟慢远远地越出了我们的生活经验，但在高能实验中，它不仅可以检验，而且已经在很高的精度上得到了证实.

6.5 因果律对速度的限制

我们用洛伦兹变换来讨论一下两个异地事件的时序问题. 设在 S 系中有两个异地事件 P(记 t_P,x_P)和 Q(记 t_Q,x_Q). 令 $t_P<t_Q$，表示 P 是先发事件. 问题在于从另一惯性系看来，这两个事件的先后次序是否会颠倒?

再设另一惯性系 $\bar{S}$. 从 $\bar{S}$ 系看,这两个事件的发生时间可由洛伦兹变换式

$$\bar{t} = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \qquad (6.5.1)$$

推出. 相应的时间间隔为

$$\bar{t}_Q - \bar{t}_P = \gamma(t_Q - t_P) - \gamma\frac{v}{c^2}(x_Q - x_P). \qquad (6.5.2)$$

由此易于看出,当 $t_P < t_Q$,导致 $\bar{t}_P > \bar{t}_Q$ 是确实可能的. 若 $x_Q > x_P$,则 v 须为正,且满足条件

$$t_Q - t_P < \frac{v}{c^2}(x_Q - x_P), \qquad (6.5.3)$$

时序可以颠倒蕴含着一个问题:任一过程的"因"必须发生在"果"之前,这样是否会使因果观念在物理学中失去意义?

举个例就能说明,由于时间流动的单向性,因果关系是不允许颠倒的. 例如我须先发出声音,声波把它传给你,你才听到了我的声音. 你听到声音的时间,音的频率和强度都是由我的发声所决定的. 所以后者是因,前者是果. 物理规律的作用正是由因来导出果. 若能存在一个现实的 $\bar{S}$ 系,对它讲,你听到我的声音在先,而我发出声音在后,那么,物理学规律就失效了. 因此相对论必须回答:由什么保证有因果关系的两事件的时序不会颠倒?下面将证明,若把因果律不许违反作为原则,那么其推论是:任何信号的传播速率都不能大于光速.

为此我们先把两事件可能有因果关系的含义数学化. 若事件 P 可能是事件 Q 的因. 那么须存在一种信号(传播速率为 u),它在事件 P 发生时(即 t_P)从当地(即 x_P)发出,在信号传至 x_Q 后才有事件 Q 的发生. 这也就是说,两事件的时间差须不小于信号在其间传播所要的时间. 用公式写出是

$$t_Q - t_P \geqslant \frac{x_Q - x_P}{u}, \qquad (6.5.4)$$

这是 P 与 Q 有因果联系的必要条件. (6.5.3)式是时序能颠倒的

条件. 要使能有因果联系的事件 P 与 Q 发生时序颠倒，则信号速率 u 须满足

$$u > \frac{c^2}{v}. \tag{6.5.5}$$

注意到洛伦兹变换要求惯性系间的相对速率 v 小于 c，这结果说明：若存在超光速的信号，那么因果律将会被破坏. 这结论也可反过来讲，若要求因果律不可能被破坏，那么光速须是任何信号的速率的上限.

这里注意两点：(1) 原则上任何运动的物体都可以用作信号，因此这结果表明，考虑到因果律不能破坏，任何物体的运动速率都不能超过光速，这是相对论的一个重要推论. 它与洛伦兹变换要求任何惯性系间的相对速率小于光速是相洽的. (2) 如果两个事件满足

$$\frac{x_Q - x_P}{t_Q - t_P} > c, \tag{6.5.7}$$

那么由于光速是信号速率的上限，它们之间原则上不可能有因果联系. 对于不会有因果关系的事件对 P 和 Q，它们之间的时序是与参考系有关的.

6.6 相对论性的速度合成

在反映时空关系上，速度的合成是一个重要方面. 当船以速度 $\boldsymbol{v}$ 对岸运动，而船上的人以速度 $\bar{\boldsymbol{u}}$ 对船运动，那么该人对岸的速度为 $\boldsymbol{u}=\bar{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{v}$. 这几乎被人们认为是天经地义的事. 伽里略变换就是按这样的观念写出来的. 现在我们知道，伽里略变换的实质性前提是时间的绝对性. 既然洛伦兹变换否定了这前提，那么上述速度合成公式一定也要改变.

先重新写下洛伦兹变换式

$$\bar{t} = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right), \tag{6.6.1}$$

$$\bar{x} = \gamma(x - vt), \tag{6.6.2}$$

$$\bar{y} = y, \tag{6.6.3}$$

$$\bar{z} = z. \tag{6.6.4}$$

对它们作微分后立即导出

$$\bar{u}_x = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2}, \tag{6.6.5}$$

$$\bar{u}_y = \frac{u_y}{\gamma(1 - vu_x/c^2)}, \tag{6.6.6}$$

$$\bar{u}_z = \frac{u_z}{\gamma(1 - vu_x/c^2)}, \tag{6.6.7}$$

其中 $\bar{u}_x=\mathrm{d}\bar{x}/\mathrm{d}\bar{t}$，$u_x=\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$，余此类推，这就是相对论性的速度合成公式.

首先有两个推论是意料之中的. 一是低速极限. 当 v 和 u 都远小于光速 c，它将回复到熟悉的结果，即 $\bar{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$. 二是高速极限. 式中的 v 是惯性系间的相对速度，它必小于 c. 我们把 $\boldsymbol{v}$ 看作任意物体的运动速度. 若运动速率 $u=c$，不论它的方向是什么，上述公式都给出 $\bar{u}=c$. 记得光速的不变性是导出洛伦兹变换的前提，所以推论和前提一致不会使我们意外.

有一个推论不完全是意料之中的. 若运动物体对 $\bar{S}$ 系的速率 $\bar{u}<c$，则这合成公式必给出它对 S 系的速率 $u<c$. 直截了当的计算就能证明这一点，这里我们不给出结果. 下面给一个数字的例子. 设在 $\bar{S}$ 系中物体沿 x 方向运动的速度 $\bar{u}=0.9\,c$，而该系对 S 系的速度是 $v=0.9\,c$. 按旧有的经验，合成速度应是 $1.8\,c$. 它显著地超过了光速. 但是在如此的高速下，以伽里略变换为基础的经验是不能用的，这时必须用相对论性的速度合成公式. 按相应的反变换，算出的结果是

$$u = \frac{\bar{u} + v}{1 + v\bar{u}/c^2} = 0.95\,c, \tag{6.6.8}$$

它在 S 系中的运动仍然是亚光速的.

我们已经知道，相对论不允许有超光速运动存在. 上述结果

的重要性在于它说明运动的超光速或亚光速是与惯性系的选择无关的，即通过速度合成使一个惯性系中的亚光速运动转化为另一惯性系中的超光速运动是不可能的.

6.7 三维空间中的张量

狭义相对论包含两重内容. 首先是以光速不变原理为前提，论证了两个惯性系间的时空关系应由洛伦兹变换描述. 前面我们已讨论了它的后果. 相对论的另一重内容是指出，一切惯性系在物理学中是完全平等的，即物理学的任何基本规律应在不同惯性系中有相同的形式，这就是相对性原理. 为了用数学形式表述相对性原理，需要引用四维时空和四维时空中的张量的概念. 这一节为它作准备，先讨论一下三维空间中的张量.

平坦的三维空间是各向同性的，因此物理规律的数学形式应与空间坐标轴的取向无关. 现在先讨论空间坐标轴的转动及它对物理量的影响.

对两种不同取向的坐标轴，空间同一点的两组坐标 x_i 和 $\overline{x}_i$ 间的关系是一个线性变换，即

$$\overline{x}_i = \sum_j R_{ij}x_j, \tag{6.7.1}$$

其中的变换矩阵 $\boldsymbol{R}$ 由两个坐标架的相对方向决定. 几何学要求这变换不改变空间任何两点间的距离. 这意味着

$$\sum_i \overline{x}_i\overline{x}_i = \sum_{i,m,n} R_{im}R_{in}x_mx_n = \sum_n x_nx_n. \tag{6.7.2}$$

从这式子看出，由距离不变的要求，推出变换矩阵 $\boldsymbol{R}$ 应满足

$$\sum_i R_{im}R_{in} = \delta_{mn}, \tag{6.7.3}$$

或用矩阵形式写成

$$\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{R}^{-1}, \tag{6.7.4}$$

其中 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{R}$ 的转置矩阵，$\boldsymbol{R}^{-1}$ 是 $\boldsymbol{R}$ 的逆矩阵. 满足(6.7.4)的 $\boldsymbol{R}$

叫正交矩阵．反之，只要(6.7.1)中的 $\boldsymbol{R}$ 是正交矩阵，则这变换保持距离不变，即它描述坐标系的一种转动．因此，任意的正交矩阵描述了刚性坐标架的任意转动．

最简单的特例是把转轴取在 z 方向上，而只让 x-y 平面转动．这时的变换矩阵是熟知的，

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{6.7.4}$$

容易验证，它是一个正交矩阵，即把 θ 换成 $-\theta$ 就得到它的逆矩阵．

物理量是用一组数描述的．它们的值与坐标架的取向有关．理论上讨论坐标轴转动的重要动机是对物理量进行分类：

(1) 若物理量仅用一个数描述(记作 T)，且其值在坐标架转动下保持不变，即

$$\bar{T}=T, \tag{6.7.5}$$

则称为标量或零阶张量，例如质量或温度等．

(2) 若物理量用三个数描述(记作 $T_i, i=1,2,3$)，且其值在坐标架转动时的变化规律与点的坐标变换一样，即满足

$$\bar{T}_i=\sum_j R_{ij}T_j, \tag{6.7.5}$$

则称为矢量或一阶张量，例如速度或电场强度等．这是矢量的代数定义，它与用几何方法定义的矢量是一致的．

(3) 若物理量用九个数描述(记作 $T_{ij}, i,j=1,2,3$)，在坐标架转动时，其值的变化满足规律

$$\bar{T}_{ij}=\sum_{m,n} R_{im}R_{jn}T_{mn}, \tag{6.7.6}$$

即每一下标都与坐标一样变换，则称为二阶张量．例如刚体转动的惯性张量或电磁场的动量流张量等．

(4) 更高阶的张量的定义可类推．n 阶张量有 3^n 个分量(记作 $T_{ij\cdots}$)．坐标轴转动时，每一下标都按坐标的变换矩阵来变化．

有了物理量按坐标架转动下的分类，就可以考虑如何表达物

理规律与坐标轴取向无关的问题了. 例如看牛顿第二定律

$$F_i = ma_i, \tag{6.7.7}$$

经验表明 F_i 和 a_i 都是矢量,m 是标量,因此它是一阶的张量方程. 当坐标架有转动,等式两边将按同样的规律变化,于是变成

$$\overline{F}_i = \overline{m}\overline{a}_i, \tag{6.7.8}$$

它与(6.7.7)没有区别. 这例子说明,当物理规律具有张量方程的形式,它将保证该规律与坐标架的取向无关.

6.8 相对性原理的四维表述

在爱因斯坦为相对论奠定了物理基础后,闵柯夫斯基首先发现,这理论意味着空间和时间是一个不可分割的整体. 他用一个数学上的四维赝欧氏空间来统一地描述这整体. 后人把它称为闵柯夫斯基时空. 它是相对论发展中重要的里程碑. 下面分层次地讨论四维时空的引入及其物理内涵.

1. 光速不变性和四维距离

考虑两个任意的惯性系 S 和 $\overline{S}$. 仅设 $t=\bar{t}=0$ 时两者的原点重合,而不要求坐标架的轴向平行. 仍看 $t=\bar{t}=0$ 时从公共原点发出的一闪光. 因为两系中光速相等,所以时空坐标满足

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0 \tag{6.8.1}$$

的事件必满足(参看 6.2 节)

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 - c^2\bar{t}^2 = 0. \tag{6.8.2}$$

进一步对于 S 系的任意事件坐标 x,y,z,t 引入函数 s,

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2. \tag{6.8.3}$$

相应地在 $\overline{S}$ 系中定义

$$\bar{s}^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 - c^2\bar{t}^2. \tag{6.8.4}$$

由光速不变性决定,当 $s=0$ 时必有 $\bar{s}=0$. 一般地说,S 与 $\overline{S}$ 系间的时空坐标变是满足光速不变要求的线性变换. 把形如(6.2.1)

~(6.2.4)的线性变换代入(6.8.4),得出的 $\bar{s}^2$ 仍是 x,y,z,t 的二次函数. 作为光速不变的后果,这二次函数只能有

$$\bar{s}^2 = A(x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2) = As^2, \qquad (6.8.5)$$

的形式,其中 A 是与两系的相对速率有关的常数. 再考虑到两个惯性系 S 和 $\bar{S}$ 是平等的,因此这比例系数 A 必等于 1. 这样就证明了,若以光速不变为前提,由(6.8.3)定义的 s^2 在惯性系变换下保持不变. 显然这命题反过来讲也成立. 因此人们把 s^2 的不变性作为光速不变原理的数学表示.

根据上面的结果,可以用 $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$, $x_4=\mathrm{i}ct$ 为笛卡儿坐标建立一个四维的欧氏空间. 这空间中任一点与原点的距离平方是该点坐标的平方和,即上面定义的 s^2. 因为 x_4 轴上的距离平方是负值,所以它在数学上属赝欧氏空间,物理学中称它为闵柯夫斯基的四维时空. 光速不变假设保证了闵柯夫斯基四维时空中的距离在时空转动下保持不变.

2. 四维时空的转动

上面的分析说明,一个坐标取定的闵柯夫斯基时空可看成一个确定的惯性系. 把上节讨论过的数学理论推广,一个四维的正交矩阵刻画了闵柯夫斯基时空的一种转动. 而在物理上,它描述的是惯性系间的一种转换. 任意的四维正交矩阵有六个独立参量,它们由惯性系间的相对速度(三个量)和空间坐标架的相对轴向(三个量)决定. 按这样的考虑,就能一般地导出任意两个惯性系间的时空关系. 当然这关系比较复杂,我们仍限于讨论简单而有用的特殊情形.

考虑 x_2 和 x_3 轴保持不变的转动. 下面将看到,它相当于两个空间轴向一致且相对沿公共的 x_1 轴运动的惯性系间的变换. 这样,我们应能几何地重导出前面得到过的洛伦兹变换.

几何地看,这转动只能是 x_1-x_4 平面转过一个角度 θ(图 6.4). 描述这转动的正交矩阵 $\boldsymbol{L}$ 与(6.7.4)类似,它是

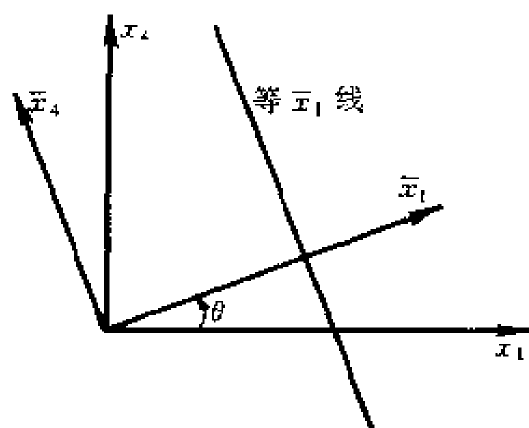


图 6.4 x_1-x_4 平面的转动

$$L=\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}, \tag{6.8.6}$$

这夹角 θ 没有观测意义. 我们能知道的是两系的相对速率 v. 因此须找出 θ 与 v 的联系. 与 6.2 节中一样,利用 $\bar{S}$ 系中的固定点都以速度 v 对 S 系运动,可写出

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}x_4}=\frac{1}{\mathrm{i}c}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=\frac{v}{\mathrm{i}c}. \tag{6.8.7}$$

另一方面按四维时空中的几何关系,由等 $\bar{x}_1$ 线的方向(仍看图 6.8.1)有

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}x_4}=-\tan\theta. \tag{6.8.8}$$

对比得出

$$\tan\theta=\frac{\mathrm{i}v}{c}, \tag{6.8.9}$$

即 $\cos\theta=\gamma$, $\sin\theta=\mathrm{i}\gamma v/c$, 其中 $\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$. 于是变换矩阵 (6.8.6)完全由相对速率 v 确定了. 以 x_μ($\mu=1,2,3,4$)为坐标,它是

$$L=\begin{pmatrix}\gamma & 0 & 0 & \mathrm{i}\gamma v/c\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -\mathrm{i}\gamma v/c & 0 & 0 & \gamma\end{pmatrix}. \tag{6.8.10}$$

记得 $x_4=\mathrm{i}ct$，它与前面导出过的洛伦兹变换完全一样.

通过重新导出了洛伦兹变换我们想说明两点：(1) 由于光速不变性保证了闵柯夫斯基时空中的四维距离不变，因此惯性系间的时空转换可用闵柯夫斯基时空的转动来刻画. (2) 前面讨论的 S 和 $\overline{S}$ 系的转换是闵柯夫斯基空间中 x_1-x_4 平面的转动.

3. 洛伦兹变换下的四维张量

现在把 S 和 $\overline{S}$ 系间的变换写成

$$\overline{x}_\mu=L_{\mu\nu}x_\nu,\quad \mu=1,2,3,4. \tag{6.8.11}$$

在相对论中人们约定，当下标在同一项中出现两次，则自动表示对它从 1 至 4 求和. 这叫爱因斯坦求和约定. (6.8.11)式右边照此省略了求和号. 我们下面将一直使用这约定. 现在把物理量按洛伦兹变换来分类.

若物理量由一个数描述，且它与惯性系的转换无关，则称四维(洛伦兹变换下的，下略)标量或零阶张量. 四维矢量或一阶张量由四个数 $T_\mu(\mu=1,2,3,4)$ 描写，且它须满足变换

$$\overline{T}_\mu=L_{\mu\nu}T_\nu, \tag{6.8.12}$$

高阶张量类似地定义. n 阶张量有 4^n 个分量，且要求 $T_{\mu\nu\cdots}$ 中每一下标与(6.8.11)有同样的变换性质.

四维张量的定义的方式与三维空间中的张量完全一样，但是物理含义却截然不同. 前面是按物理量的方向特性作分类，而四维的分类是按物理量在惯性系转换下的行为来作的. 尤其注意，当用(6.8.6)，变换前后的两惯性系的三维空间轴向是平行的，即空间轴没有转动. 下面讨论对物理量作四维分类的意义.

4. 相对性原理的四维表述

相对论的要点是断言,一切惯性系在物理上等价. 问题在于基本物理规律应有什么形式,才表明它符合相对论的要求.

上面的理论说明,当把物理量用四维张量表示,且相应的物理规律有四维张量方程的形式,则它在惯性系转换中必将保持形式不变. 例如某规律能表成

$$F_\mu = G_{\mu\nu}A_\nu + B_\mu, \tag{6.8.13}$$

且有关量都具有张量的变换性质,那么惯性系转换后,等式两边按同样的规律变换,这方程必变为

$$\overline{F}_\mu = \overline{G}_{\mu\nu}\overline{A}_\nu + \overline{B}_\mu \tag{6.8.14}$$

的形式,即方程在洛伦兹变换下是协变的. 这样我们就知道它符合相对性原理论的要求. 把物理量按洛伦兹变换分类的动机正在这里. 反过来讲,要求物理规律满足相对性原理,它也必须有张量方程的形式(我们不讨论微观物理规律,因此不涉及旋量). 这原则将是下一章中讨论相对论性的物理学的基础. 这里只举几个四维张量的例子.

例 1 固有时间.

闵柯夫斯基空间中的四维(以后简记为 4-)间隔 $\mathrm{d}x_\mu = (\mathrm{d}\boldsymbol{r}, \mathrm{i}c\,\mathrm{d}t)$是洛伦兹变换下最基本的 4-矢量. 时间间隔 $\mathrm{d}t$ 是它的一个分量,而不是 4-标量. 设质点在 $\mathrm{d}t$ 时间内走过 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$,我们定义

$$\mathrm{d}\tau^2 = \mathrm{d}t^2 - \frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|^2}{c^2} = -\frac{1}{c^2}\mathrm{d}x_\mu \mathrm{d}x_\mu. \tag{6.8.15}$$

等式右边显然是 4-标量,因此 $\mathrm{d}\tau$ 是 4-标量.

为看清它的物理意义,我们把参考系转到相对质点静止的 $\overline{S}$ 系. 在 $\overline{S}$ 系中有 $\mathrm{d}\overline{x}_i = 0(i=1,2,3)$,因此 $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}\overline{t}$. 这说明 τ 与质点静止系中的时间 $\overline{t}$ 相同. 形象地说,τ 是质点所携带时钟的走时,人们常把它叫固有时. 张量性物理理论中常用 τ 作为时间变量,就因为它是 4-标量.

例 2 四维速度.

4-速度 U_μ 被定义为

$$U_\mu = \frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\tau} = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\tau}, \quad \mathrm{i}c\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right). \tag{6.8.16}$$

因 $\mathrm{d}x_\mu$ 是 4-矢量,而 $\mathrm{d}\tau$ 是 4-标量,所以 U_μ 是 4-矢量. 运动学中宜用三维速度 $\boldsymbol{v}=\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$ 描述质点的运动. 记得动钟的变慢,即 $\mathrm{d}t=\gamma\mathrm{d}\tau$. U_μ 和三维速度 $\boldsymbol{v}$ 的关系是

$$U_\mu = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}(\boldsymbol{v},\mathrm{i}c) = \gamma(\boldsymbol{v},\mathrm{i}c). \tag{6.8.17}$$

值得注意,U_μ 的四维长度为

$$U_\mu U_\mu = \gamma^2(v^2 - c^2) = -c^2. \tag{6.8.18}$$

对描述质点的运动,U_μ 不如 $\boldsymbol{v}$ 直观. 引入 U_μ 的价值在于它是张量,因物理规律须有张量方程的形式. 下章讨论相对论力学规律时会用到它. 此外,U_μ 作为 4-矢量,它的变换必满足(6.8.12). 由此也一样可导出三维速度 $\boldsymbol{v}$ 的变换公式. 我们不再重复推导.

例 3 四维微商算符.

在三维空间中有微商算符 $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$. 现在相应地定义 4-算符,

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\nabla, \quad \frac{1}{\mathrm{i}c}\frac{\partial}{\partial t}\right). \tag{6.8.19}$$

可以证明,它具有 4-矢量的性质. 设 φ 是任一标量场,看 $\partial_\mu\varphi$ 的变换.

$$\bar{\partial}_\mu\bar{\varphi} = \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\bar{x}_\mu} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial\bar{x}_\mu} = (L^{-1})_{\nu\mu}\partial_\nu\varphi = L_{\mu\nu}\partial_\nu\varphi. \tag{6.8.20}$$

这表明 $\partial_\mu\varphi$ 是 4-矢量. 推导中用到了洛伦兹矩阵为正交矩阵,即 $\boldsymbol{L}^{-1}=\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}$. 同样,若 F_μ 为 4-矢量场,则 $\partial_\mu F_\mu$ 是标量,而 $\partial_\mu F_\nu$ 是二阶张量.

由 4-矢量型的微商算符可引伸出 4-标量算符,即

$$\Box \equiv \partial_\mu \partial_\mu = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}. \qquad (6.8.21)$$

$\Box$就是波动方程中的达朗贝尔算符. 达朗贝尔算符的四维标量性说明,若有张量场满足波动方程

$$\Box \varphi = 0, \qquad (6.8.22)$$

那么这规律是符合相对论的要求的,即洛伦兹变换不改变它的形式.

第 7 章　相对论性的物理学

7.1　电动力学规律的协变性

相对论的名称来自相对性原理. 它认为一切惯性系都平等,因此惯性系的运动速度仅具有相对的意义. 第 6 章中进一步指出,若相对性原理成立,那么物理学的基本规律应能表成四维张量方程的形式. 这一章中,我们将考察物理规律是否符合这要求. 宏观物理的基本规律有两方面:一方面是一切有质量物体所遵循的力学规律,另一方面是一切电磁现象所遵循的电动力学规律. 下面将先讨论电磁规律,而后讨论力学规律. 实际上,相对性原理对探索微观物理规律有更重要的作用. 但是这已越出本课程的范围了.

我们已经知道,在引入电磁势 φ 和 A 后,电动力学基本规律是

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{7.1.1}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\boldsymbol{j}. \tag{7.1.2}$$

这里的电磁势须满足洛伦兹规范条件

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \nabla\cdot\boldsymbol{A} = 0. \tag{7.1.3}$$

ρ 和 j 作为电磁场的源,它满足电荷守恒方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\boldsymbol{j} = 0. \tag{7.1.4}$$

现在我们想知道,它们能否与相对性原理相容.

先形式上引入四维的电流 j_μ 和电磁势 A_μ,

$$j_\mu = (\boldsymbol{j}, \quad ic\rho), \tag{7.1.5}$$

$$A_\mu = (\boldsymbol{A}, \quad i\varphi/c). \tag{7.1.6}$$

这样,上面的方程可重写成

$$\Box A_\mu = -\mu_0 j_\mu, \tag{7.1.7}$$

$$\partial_\nu A_\mu = 0. \tag{7.1.8}$$

$$\partial_\mu j_\mu = 0. \tag{7.1.9}$$

从这形式的方程看出,若电动力学规律满足相对性原理的要求,那么 j_μ 和 A_μ 都必定是洛伦兹变换下的 4-矢量. 反之,若用实验能证实 j_μ 和 A_μ 有 4-矢量的变换性质,那么电磁规律就必服从相对性原理.

第 6 章开头指出过,若以伽里略变换为出发点,电动力学与相对性原理是不相容的. 现在则看到,当采用洛伦兹变换,电磁规律与相对性原理是相洽的. 这为狭义相对论的确立铺下了一块不可缺少的基石,否则光速不变性将失去基础. 值得指出,电磁规律到底是否符合相对性原理,这不是一个理论问题,而是实践问题. 也就是说,只有实践才能给出是或否的回答. 如今人们接受肯定的回答,这是由于它在各种具体问题的大量理论推论中已充分地得到了实践的证实.

当肯定了电磁规律的协变性,我们就能从一个惯性系中的 j_μ 或 A_μ,按洛伦兹变换来推出另一惯性系中的相应量. 下面我们用它讨论一个例子. 设 S 系中有一沿 x 方向匀速运动的点电荷,我们需要知道它产生的电磁势.

显然这问题从随电荷运动的 $\bar{S}$ 系来处理要容易得多. 在 $\bar{S}$ 系中,让点电荷 e 处于坐标原点. 它作为静止电荷,所产生的是库仑标势,即

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{\bar{r}}, \tag{7.1.10}$$

$$\bar{A}_i = 0, \quad i = 1,2,3. \tag{7.1.11}$$

然后我们只须用洛伦兹反变换,即可从 $\bar{S}$ 系中的结果来推出 S 系

中的结果，

$$\varphi = \gamma(\overline{\varphi} + v\overline{A}_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\gamma e}{\overline{r}}, \qquad (7.1.12)$$

$$A_1 = \gamma\left(\overline{A}_1 + \frac{v}{c^2}\varphi\right) = \frac{v}{c^2}\varphi, \qquad (7.1.13)$$

$$A_2 = \overline{A}_2 = 0, \qquad (7.1.14)$$

$$A_3 = \overline{A}_3 = 0. \qquad (7.1.15)$$

注意(7.1.10)式中的 $\overline{r}$ 是 $\overline{S}$ 系中场点与电荷所在点的(三维)距离. 我们也须把它转换到 S 系. 考虑到电荷运动方向上有距离的洛伦兹收缩，而垂直方向上则没有，我们把 $\overline{r}$ 分解为平行和垂直于运动方向的两部分(图 7.1). S 和 $\overline{S}$ 系中相应量的关系为

$$\overline{r}_{\perp} = r_{\perp}, \qquad (7.1.16)$$

$$\overline{r}_{/\!/} = \gamma r_{/\!/}. \qquad (7.1.17)$$

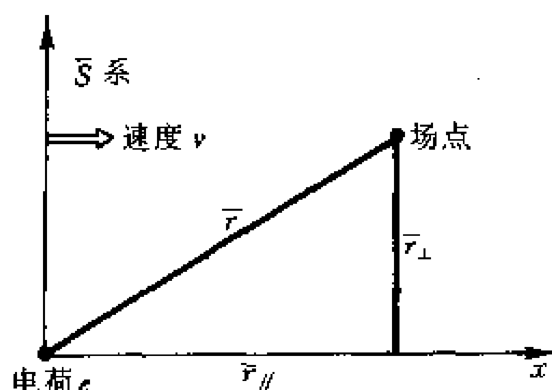


图 7.1 $r_{\perp}$ 与 $r_{/\!/}$

这样我们就最后地得到了原问题所要的结果. 它是

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{\sqrt{r_{\perp}^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)+r_{/\!/}^2}}, \qquad (7.1.18)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{v}}{c^2}\varphi, \qquad (7.1.19)$$

式中的 $r_{/\!/}$ 和 $r_{\perp}$ 分别是 S 系中场点与电荷所在点的平行和垂直距离.

注意，如果利用点电荷的电量是洛伦兹变换下的不变量，我们用推迟势公式也一样可算出运动点电荷所产生电磁势，但处理要复杂得多. 这例子给我们以启示：如果有一个特殊的惯性系使问题显得简单，那么我们可以先在这系中求得结果，然后用洛伦兹变换把这结果转换到实际感兴趣的惯性系中去.

7.2 电磁场强的变换性质

肯定了电动力学规律的协变性，那么电磁场一定也是张量场. 我们已经知道，电磁场强与电磁势的关系是

$$\boldsymbol{B} = \nabla\times \boldsymbol{A}, \tag{7.2.1}$$

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \nabla\varphi. \tag{7.2.2}$$

为此引入一个反对称的二阶张量 $F_{\mu\nu}$，

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{7.2.3}$$

易于由定义看出，它的六个独立分量分别与 E 和 B 的六个分量相联系，即

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -\frac{\mathrm{i}}{c}E_x \\ -B_z & 0 & B_x & -\frac{\mathrm{i}}{c}E_y \\ B_y & -B_x & 0 & -\frac{\mathrm{i}}{c}E_z \\ \frac{\mathrm{i}}{c}E_x & \frac{\mathrm{i}}{c}E_y & \frac{\mathrm{i}}{c}E_z & 0 \end{pmatrix}, \tag{7.2.4}$$

因此 $F_{\mu\nu}$ 被称为电磁场张量.

利用电磁场张量，三维形式的麦克斯韦方程可写成四维张量方程的形式

$$\partial_\nu F_{\mu\nu} = \mu_0 j_\mu, \tag{7.2.5}$$

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0, \tag{7.2.6}$$

其中前一个方程中 $\mu=4$ 或 $\mu=1,2,3$ 分别相当于

$$\nabla\cdot \boldsymbol{E} = 0, \tag{1.4.5}$$

$$\nabla\times \boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \mu_0 \boldsymbol{j}. \tag{1.4.8}$$

后一个方程中当 λ,μ,ν 有两个相等时,所得的是恒等式. 三者全不同时,它相当于

$$\nabla\times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0, \tag{1.4.6}$$

$$\nabla\cdot \boldsymbol{B} = 0. \tag{1.4.7}$$

上面的论证表明,麦克斯韦方程也符合相对性原理的要求. 顺便再一次指出,这样各惯性系中的光速就必定一样,而它是建立相对论所必须的.

按张量的定义,电磁场张量 $F_{\mu\nu}$有变换性质

$$\overline{F}_{\mu\nu} = L_{\mu\alpha}L_{\nu\beta}F_{\alpha\beta}. \tag{7.2.7}$$

若用矩阵表示这关系,则写成

$$\overline{F} = \boldsymbol{LFL}^{-1}, \tag{7.2.8}$$

它给出了两个不同惯性系中的场量间的关系. 由(7.2.8)易于算出分量间的关系,它可用 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 表示成

$$\overline{E}_x = E_x, \tag{7.2.9}$$

$$\overline{E}_y = \gamma(E_y - vB_z), \tag{7.2.10}$$

$$\overline{E}_z = \gamma(E_z + vB_y), \tag{7.2.11}$$

和

$$\overline{B}_x = B_x, \tag{7.2.12}$$

$$\overline{B}_y = \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right), \tag{7.2.13}$$

$$\overline{B}_z = \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right). \tag{7.2.14}$$

它也可以用三维的矢量形式写成

$$\overline{\boldsymbol{E}} = \gamma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times \boldsymbol{B}) - \frac{\gamma}{\gamma+1}\frac{\boldsymbol{v}}{c}\left(\frac{\boldsymbol{v}}{c}\cdot \boldsymbol{E}\right), \tag{7.2.15}$$

$$\overline{\boldsymbol{B}} = \gamma\left(\boldsymbol{B} - \frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}}{c^2}\right) - \frac{\gamma}{\gamma+1}\frac{\boldsymbol{v}}{c}\left(\frac{\boldsymbol{v}}{c}\cdot\boldsymbol{B}\right). \quad (7.2.16)$$

从上述关系易于证明，$E^2-c^2B^2$ 及 $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}$ 在惯性系转换下保持不变，即

$$\overline{E}^2 - c^2\overline{B}^2 = E^2 - c^2B^2, \quad (7.2.17)$$

$$\overline{\boldsymbol{E}}\cdot\overline{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}, \quad (7.2.18)$$

并且由 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 只能组合出这么两个洛伦兹变换下的不变量.

下面举两个有趣的例子.

例 1 S 系中只有一均匀电场 $\boldsymbol{E}$，而没有磁场，问 $\overline{S}$ 系在同一情况下看到什么？显然这问题的答案可直接由上面的变换式给出. 若 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 平行，$\overline{S}$ 系中看到的结果与 S 系完全一样. 若 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 垂直，则 $\overline{S}$ 系看到有电场，也有磁场. 其强度是

$$\overline{\boldsymbol{E}} = \gamma\boldsymbol{E}, \quad (7.2.19)$$

$$\overline{\boldsymbol{B}} = -\gamma\frac{\boldsymbol{v}}{c^2}\times\boldsymbol{E}. \quad (7.2.20)$$

这例子形象地说明，电磁场是一个整体，而电场或磁场都各是其部分表现. 在相对论中，这整体才得到了统一的描写.

顺便指出，电场和磁场用不同单位来量度是历史造成的. 在国际单位制中，电场强度和磁感应强度甚至有不同的量纲（两者之比是 c 的量纲），这是单位制的人为性被过分地利用了的后果. 因它对电磁学的理论讨论很不利，所以国际单位制在理论研究中很少被采用.

例 2 S 系中有相互垂直的均匀场 E 和 B，问能否找到一个惯性系 $\overline{S}$，其中只看到电场或磁场. 考虑到惯性系转换后 $E^2-c^2B^2$ 是不变的，因此要回答这问题，须先明确 S 系中给定的 $E^2-c^2B^2$ 的正负. 我们只讨论它为正的情形. 由(7.2.17)，这时在另一惯性系中只看到磁场显然不可能. 要只看到电场而使磁场消失却是可能的. 从上面的变换式不难看出，让 $\overline{S}$ 系对 S 系的运动在 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ 的方向上，且令相对速率的大小为

$$v=\frac{c^2B}{E} \tag{7.2.21}$$

即可. 这速率小于光速,因此这样的惯性系是存在的.

7.3 电磁场的四维动量能量张量

电荷和电流产生电磁场的规律是满足相对性原理的. 那么另一方面,电磁场对电荷和电流的作用规律也应当满足相对性原理.

我们已经知道,若介质某体元中的电荷密度为 ρ;电流密度为 $\boldsymbol{j}$,则载荷体所受的力密度由洛伦兹公式决定,

$$\boldsymbol{f}=\rho\boldsymbol{E}+\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}. \tag{7.3.1}$$

这公式是三维的,它不能告诉我们这力在惯性系转换下的性质. 为此参照(7.3.1)引入一个四维矢量 f_μ,

$$f_\mu=F_{\mu\nu}j_\nu, \tag{7.3.2}$$

这关系式在惯性系转换下是协变的. 容易验证,(7.3.2)式的前三个分量就是洛伦兹的电磁力公式(7.3.1). 因此这 f_μ 被称为 4-电磁力(密度). 值得注意的是它的第四分量代表什么.

把电磁场张量和 4-电流的分量代入,立即得到

$$f_4=\frac{\mathrm{i}}{c}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}=\frac{\mathrm{i}}{c}W. \tag{7.3.3}$$

这样看出,f_4 反映的是电磁力对载流体的功率密度 W. 于是电磁力 4-矢量可表成

$$f_\mu=\left(\boldsymbol{f},\quad \frac{\mathrm{i}}{c}W\right). \tag{7.3.4}$$

在第 1 章中我们曾讨论过电磁作用下的能量和动量的守恒性,那里把它们写成

$$W=-\frac{\partial w}{\partial t}-\nabla\cdot\boldsymbol{S}, \tag{1.5.2}$$

$$\boldsymbol{f}=-\frac{\partial\boldsymbol{g}}{\partial t}-\nabla\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}} \tag{1.6.2}$$

的形式，其中电磁场的能量密度 w，能流密度 $\boldsymbol{S}$，动量密度 $\boldsymbol{g}$ 以及动量流密度 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}$ 的定义参看 1.5 和 1.6 两节. 因为已经知道麦克斯韦方程和洛伦兹力公式都是协变的，现在不需要在四维形式下重新推导. 这里要说明的是，能量和动量的守恒性与惯性系的选择应无关，所以它必能表成张量方程的形式.

从(1.5.2)和(1.6.2)的形状看，其左边正构成一个四维矢量，因此这两式必能合并成一个四维张量方程. 把它写成

$$f_\nu = -\partial_\mu T_{\mu\nu}, \tag{7.3.5}$$

其中 $T_{\mu\nu}$ 的定义是

$$(T_{\mu\nu}) = \left(\begin{array}{c|c} \overleftrightarrow{\boldsymbol{T}} & \frac{\mathrm{i}}{c}\boldsymbol{S} \\ \hline \mathrm{i}c\boldsymbol{g} & -w \end{array}\right), \tag{7.3.6}$$

它被称为电磁场的 4-能量动量张量. (7.3.5)式就是电磁作用下能量和动量守恒的四维表示. 用四维的语言讲，这种守恒表现为电磁场的 4-能量动量张量的四维散度等于 4-电磁力. 其细致的含义与第 1 章中分析过的完全一样.

在此把以上三节的讨论小结一下. 现在我们已看到，前五章中得到过的所有电动力学基本规律都能表成四维张量方程的形式. 这说明，若采用洛伦兹变换代替伽里略变换，那么电磁规律是与相对性原理相洽的. 这正是爱因斯坦建立狭义相对论的基础. 由此引申出两个要点：(1)"相洽"并不意味着"必然服从"，因此这里是需要有进一步的实践检验的；(2) 当事实已确证电动力学服从相对论的要求，那么各种电磁学量在惯性系转换下的变换关系就都确定了. 这种关系在处理问题时是有用的.

7.4 相对论性的力学

前面曾提到，如果用洛伦兹变换代替伽里略变换，那么牛顿力学将不能在惯性系转换下保持不变. 这就成了新的问题. 自然的

猜想是，牛顿第二定律也仅是力学规律的低速近似．若这样想，首先须从理论上找出在洛伦兹变换下协变的力学规律，然后把它交付给实践来检验．让我们先做第一件事．

显然的要求是新规律须以牛顿力学为低速近似，所以从牛顿力学方程出发，来推广得到洛伦兹变换下协变的力学方程．按牛顿第二定律，有

$$\boldsymbol{F}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_0\boldsymbol{v}). \tag{7.4.1}$$

第 6 章中已看到，四维速度应定义为

$$U_\mu=\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\tau}=\gamma(\boldsymbol{v},\ \mathrm{i}c). \tag{7.4.2}$$

在低速近似下，$\mathrm{d}\tau$ 与 $\mathrm{d}t$ 的差别可以忽略，它们的前三个分量将就是普通意义下的速度．因此我们猜想，为得到协变的力学规律，牛顿第二定律中的 $\boldsymbol{v}$ 应由 U_μ 代替，t 应由 τ 代替．问题是如何定义四维的力．

各种不同的力在惯性系变换下的行为应当是一致的，因此我们可参照电磁力来分析．上一节中已看到，电磁力密度

$$f_\mu=\left(\boldsymbol{f},\quad \frac{\mathrm{i}}{c}W\right) \tag{7.4.3}$$

是 4-矢量．力密度的体积分是力，但是由于洛伦兹收缩效应，体积 $\mathrm{d}V$ 不是标量．类似于用固有时 $\mathrm{d}\tau$ 代替 $\mathrm{d}t$，这里引入固有体积 $\mathrm{d}V_0$ 来代替 $\mathrm{d}V$．固有体积指体元在相对它为静止的参考系中的体积．考虑到运动方向上有洛伦兹收缩，所以

$$\mathrm{d}V_0=\gamma\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\gamma\mathrm{d}V, \tag{7.4.4}$$

这是洛伦兹变换下的标量．于是四维力 F_μ 可定义为

$$F_\mu=\iiint\gamma f_\mu\mathrm{d}V, \tag{7.4.5}$$

它必是 4-矢量．当受力体为质点，式中的 γ 由质点的速度决定，而与积分无关．于是四维力 F_μ 与三维力 $\boldsymbol{F}$ 的关系是

$$F_\mu = \gamma\left(\boldsymbol{F}, \quad \frac{\mathrm{i}}{c}P\right), \tag{7.4.6}$$

其中的 P 是功率．这样由牛顿第二定律猜出，满足相对论要求的力学规律是

$$F_\mu = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(m_0 U_\mu), \tag{7.4.7}$$

式中的 m_0 是一个与质点的惯性有关的 4-标量．

至此为止，(7.4.7)式仅是理论上推测的力学规律．它符合了两个要求：(1) 这规律满足相对性原理，即能保证伽里略的预言："不论你观测什么现象，你都无法知道船在动或不动"；(2) 当运动速度很小，则 $\gamma=1$，$\mathrm{d}\tau$ 与 $\mathrm{d}t$ 没有区别，四维速度或四维力的前三个分量就是普通的速度或力．这样，该规律在低速下回到牛顿第二定律．这两点虽然都很必要，但是并不保证所推测的规律的正确性．重要的是它在高速情形下与牛顿第二定律的差别．只有这差别才能供实践来检验，以判断所推测的规律是否与事实一致．为此我们把(7.4.7)的前三个分量写成三维空间的矢量方程，同时把第四个分量写成三维的标量方程：

$$\gamma \boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\gamma m_0 \boldsymbol{v}), \tag{7.4.8}$$

$$\gamma P = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\gamma m_0 c^2). \tag{7.4.9}$$

注意用三维形式并不意味着回到低速（即非相对论）情形．这样做只因为我们的实验是在三维空间中做的．

先分析前一个 3-矢量方程．利用 $\gamma=\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau$，(7.4.8)可重写作

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma m_0 \boldsymbol{v}), \tag{7.4.10}$$

它与牛顿第二定律的差别仅在一点上，即用

$$m = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{7.4.11}$$

代替了原来的 m_0，作为描写质点惯性的物理量．在相对论中把 m_0

叫静质量，而把 m 叫动质量．由规律看出，动质量才是惯性质量．它不完全是质点的固有性质，而也与质点的运动速度有关．m_0 是质点的内禀属性，但它并不代表惯性的大小．仅在低速运动时，静质量才是惯性的量度．显然，这差别仅在质点接近光速运动时才能用实验来检验．

有趣而重要的是，若不断加速一个亚光速质点，它的惯性质量将不断增大．当逼近光速时，惯性质量将变成无穷大，即外力将难以再增大它的速度．这样，把亚光速物体加速成超光速物体是不可能的．记得超光速运动的存在会导致破坏因果律，而现在相对论力学预言：用力学方法把质点的速度提高到超过光速是做不到的．前面已指出，从运动学的角度做不到（参看 6.5 节），现在则讲，用动力学的方法也做不到．

再讨论（7.4.9）式．它可重写成

$$P = \frac{d}{dt}(\gamma m_0 c^2) = \frac{d}{dt}(mc^2). \qquad (7.4.12)$$

外力 $\boldsymbol{F}$ 对质点做功，导致质点能量的增加．因此等式右边应代表能量的变率．质点的能量 E 应定义为

$$E = mc^2 = \gamma m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad (7.4.13)$$

问题在于它是什么能量．按牛顿力学，与质点的速度有关的能量应是动能．让我们注意，能量的概念与能量的守恒性是分不开的．因此，任何一种能量的定义都可以叠加一个常数，而后者是没有物理意义的．这也就是说，任一种能量都有零点的任意性．出于自然性的考虑，宜在速度为零时把动能规定为零．因此相对论中把动能定义为

$$K = mc^2 - m_0 c^2 = (\gamma - 1) m_0 c^2. \qquad (7.4.14)$$

在 $v = 0$ 时有 $K = 0$；在 $v \ll c$ 时，它回归到 $K = \frac{1}{2} m_0 v^2$．在这样定义动能后，（7.4.13）式可重写作

$$E = K + m_0c^2, \tag{7.4.15}$$

m_0c^2 被称为质点的静能. 质点的总能量是其动能和静能之和.

如上面所说,能量只有其变化部分才有物理意义. 如在牛顿力学中把动能定义为$\frac{1}{2}m_0v^2+c$,这对任何问题的处理方法和结果都不会有影响. 那么,(7.4.15)中的 m_0c^2 究竟是一个没有物理意义的叠加常数,还是有物理意义的一部分能量?这是一个深刻的问题,我们将在下一节中讨论.

7.5 质能关系

现在讨论质点的 m_0c^2 是否确实是能量的问题. 问题首先在于质点的静止质量能否发生变化. 若它不可能变化,那么 m_0c^2 只是一个没有物理意义的叠加常数. 若它在某些情况下会发生变化,那么就需要用实验来检验,它的减少(或增加)是否会导致其他能量的增加(或减少),即是否服从能量的守恒定律. 只有在这两方面都有肯定的回答后,才能把 m_0c^2 叫作质点的静能. 在爱因斯坦建立相对论时,尚没有静质量能变化的任何实验证据. 但是他意识到这问题的重要性. 在他为建立相对论而写的两篇论文中,第二篇[①]的题目是"物体的惯性与它的能量有关吗?"其中他用一个假想实验论证了,当物体通过电磁辐射而放出了能量,那么它的惯性将减小. 从而他提出了著名的质能关系.

爱因斯坦的假想实验中惯性质量的变化太小,实际上难以检验. 质能关系的最初的实验证据来自核物理实验. 后来在粒子物理实验中,静质量的显著变化已成了司空见惯的现象. 下面借助原子核的质量亏损来讨论有关的概念和现象.

---

① A. Einstein: Ist die Tragheit eines Korpers von seinem Energiegehalt abhangig? 发表于 Annalen der Physik, 17, (1905). 论文集 The Principle of Relativity 中有英译文.

以最简单的复合核——氘核为例．氘的组分粒子的静质量为

$$m_p = 1.6726 \times 10^{-27}\,\text{kg}, \tag{7.5.1}$$

$$m_n = 1.6750 \times 10^{-27}\,\text{kg}. \tag{7.5.2}$$

氘核自身静质量的实测值为

$$m_D = 3.3437 \times 10^{-27}\,\text{kg}. \tag{7.5.3}$$

这里都省略了代表静质量的下标．$m_D<m_p+m_n$，表明质子和中子结合成氘核时有静质量的亏损．亏损值是

$$\Delta m_D = m_p + m_n - m_D = 0.0039 \times 10^{-27}\,\text{kg}. \tag{7.5.4}$$

核质量的实测表明，任何原子核都有质量亏损存在，即任何核的质量都小于其组元粒子的质量和．这是质点组的静质量能有变化的直接证据．

若 mc^2 代表静能，则氘核形成时的静能亏损为

$$\Delta m_D c^2 = 3.6 \times 10^{-13}\,\text{J} = 2.2\,\text{MeV}. \tag{7.5.5}$$

而氘核解离时则静能增加了同样的量．需要检验的是把静能考虑在内，能量是否维持守恒？另一方面的事实是，实验发现质子和中子结合成氘时会放出能量 B，而把氘解离成质子和中子时须至少供给它能量 B．这能量 B 被称为氘的结合能或解离能．它的实测值是 2.2 MeV，与氘核的静能亏损值相一致．把这两方面的事实联系起来，表明静能不仅能有变化，而且它与其他形式的能量在转化中是守恒的．这正是质能关系所要的证据．

让我们用质能关系来分析任何一种核反应，

$$A + B \longrightarrow C + D. \tag{7.5.6}$$

反应前的静质量 m_A+m_B 与反应后的静质量 m_C+m_D 是不等的．若前者大于后者，它应是一种释放能量的反应，反之，则将是一种吸收能量的反应．质能关系的这些推论也都已得到实验的证实．总之，核物理事实证明了 m_0c^2 确是质点的能量的一部分，$E=m_0c^2+K$ 代表了一个自由质点的总能量．

让我们仍以氘核为例，对静能变化的机制作些说明．质子和中子能结合成氘是因为质子和中子间有吸引力，它就是通常讲的

核力．这是一种强度很大而力程很短的作用力．核力可用相应的势能 V 来描述(图 7.2)，吸引性表明在近距离下 $V<0$．当质子和中子在核力作用下构成束缚态，由力学知，系统的总机械能必定为负数，即

$$K_p + K_n + V < 0. \tag{7.5.7}$$

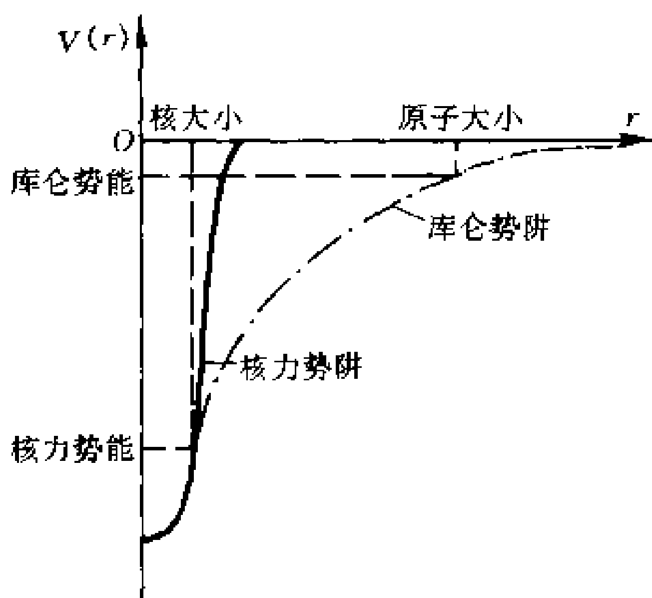


图 7.2　核力与静电力的示意比较

容易理解，(7.5.7)中左边的值反号就是氘的结合能(或解离能)．把合成后的氘看成质点组，它所具有的总能量是

$$\begin{aligned} E &= m_p c^2 + m_n c^2 + K_p + K_n + V \\ &= m_p c^2 + m_n c^2 - B. \end{aligned} \tag{7.5.8}$$

而把它看成一个质点，它在静止时的能量是

$$E = m_D c^2. \tag{7.5.9}$$

两者的对比可使我们看清质量亏损和结合能的关系．复合质点的静质量中不仅包含其组分粒子的静质量，还包含了它们的机械能的贡献．通常讲的核能，实际上是核子在核内的机械能．核能的释放是核内机械能的减少，相应地表现出系统静质量的减少．

按照质能关系，任何组元粒子构成复合粒子时都有质量亏损．电子和氢核合成为氢原子时有 13.6 eV 的光能放出，相应就会有

质量亏损

$$\Delta m_{\mathrm{H}}=\frac{13.6\,\mathrm{eV}}{c^2}=2.4\times10^{-34}\,\mathrm{kg},\tag{7.5.10}$$

这亏损很小，仅是氢原子静质量的 10^{-7}. 在精度要求不高的理论中可以忽略，而在实测中是通常难以测到的. 这正是常把质子和电子的质量之和当氢的质量的原因. 原子的结合能远小于核的结合能，则是电磁力远比核力要弱的反映(图 7.2).

7.6 质点的四维动量及其守恒

对质点引入四维动量

$$p_\mu=m_0U_\mu=(\boldsymbol{p},\quad \mathrm{i}E/c),\tag{7.6.1}$$

其中

$$\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}=\gamma m_0\boldsymbol{v},\tag{7.6.2}$$

$$E=mc^2=\gamma m_0c^2.\tag{7.6.3}$$

它显然是一个 4-矢量. 前三个分量是相对论性的三维动量，第四分量代表质点的能量. 引用这 4-动量，相对论性的动力学方程(7.4.7)可重写作

$$F_\mu=\frac{\mathrm{d}P_\mu}{\mathrm{d}\tau}.\tag{7.6.4}$$

回到三维形式，它们是

$$\boldsymbol{F}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t},\tag{7.6.5}$$

$$P=\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}.\tag{7.6.6}$$

重要的问题在于这样定义的质点 4-动量是否具有守恒性.

在牛顿力学中，由于把牛顿第三定律作为基本规律，所以动量守恒是动力学方程的推论. 我们曾指出，作用和反作用的相等相反是牛顿力学中以作用的瞬时性观念为前提的近似规律. 当考虑到相互作用是由场传递的，而场的传播速度又是有限的，宏观质点

间的作用与反作用一般不满足牛顿第三定律．但是，这并不意味着动量一般地不守恒．相反，我们论证过，至少在电磁作用下，若把相互作用中产生的辐射所携带的动量和能量也考虑在内，整个系统的动量和能量是守恒的．由一般物理理论证明，动量和能量的守恒仅是空间和时间的均匀性的反映，因此它们是普遍成立的．但是由于技术原因，相对论性的动量和能量的守恒只能用微观粒子过程来检验．微观运动作为一种新的运动形态，系统的动量和能量是否保持守恒是需要检验的．

在讨论这种守恒的理论后果前，我们须作一些运动学的准备．前面已指出过，对高速运动的粒子，由于其三维速度很接近光速，所以 $\boldsymbol{v}$ 不是一个好的运动学变量．为此人们常用三维动量 $\boldsymbol{p}$ 作为描述运动的基本变量．当这样做，我们就要把能量 E 和速度 $\boldsymbol{v}$ 当作 $\boldsymbol{p}$ 的函数．下面先导出这种关系．由 4-动量的定义，推知其四维“长度”为

$$p_\mu p_\mu = p^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m_0^2c^2, \tag{7.6.7}$$

因此能量对动量的依赖关系是

$$E = \sqrt{m_0^2c^4 + p^2c^2}. \tag{7.6.8}$$

在低速下 $p \ll E/c$，这式子还原为

$$E = m_0c^2 + \frac{p^2}{2m_0}, \tag{7.6.9}$$

它是动能和静能之和的非相对论公式．另外，从(7.6.2)和(7.6.3)可导出

$$\frac{\boldsymbol{v}}{c} = \frac{c}{E}\boldsymbol{p} = \frac{\boldsymbol{p}}{\sqrt{m_0^2c^2 + p^2}}, \tag{7.6.10}$$

它是 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{p}/m$ 的相对论推广．在相对论力学中，静质量不为零的质点必有 $v<c$，因为它的能量达不到无穷．以光速运动的粒子如光子，其静质量必为零．反之，静质量为零的粒子只能以光速运动．这类粒子的能量和动量的关系是

$$E = pc. \tag{7.6.11}$$

以上是一些相对论力学中普遍适用的运动学关系. 下面我们讨论动量和能量守恒在微观粒子系统中的应用.

1. 不稳定粒子的衰变

为简单起见,我们限于讨论二体衰变的情形. 设不稳定粒子 A 衰变成粒子 B 和 C(图 7.3),

$$A \longrightarrow B + C. \tag{7.6.12}$$

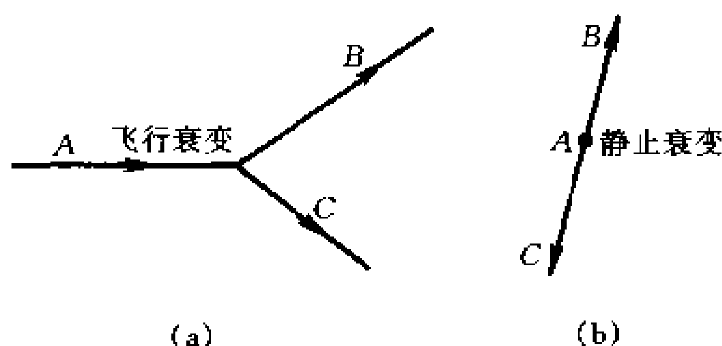


图 7.3 二体衰变

让我们把 A 放在衰变前为静止的参考系中讨论. 由动量和能量的守恒给出

$$m_A c = \sqrt{m_B^2 c^2 - p_B^2} + \sqrt{m_C^2 c^2 + p_C^2}, \tag{7.6.13}$$

$$0 = p_B - p_C, \tag{7.6.14}$$

由此易于解出衰变产物 B 和 C 的动量为

$$p_B = p_C = \sqrt{\frac{(m_A^2 + m_B^2 - m_C^2)^2}{4m_A^2} - m_B^2} \cdot c. \tag{7.6.15}$$

这结果说明在二体衰变时,不必考虑相互作用的细节,衰变产物的运动状况已被动量和能量的守恒所决定. 仅有其飞行方向是任意的.

这里引申出一个有普遍意义的推论. 从(7.6.13)看出,若粒子 A 能衰变成粒子 B 和 C,则必须有条件 $m_A > m_B + m_C$. 这是能

量守恒的直接后果，因此对多体衰变也成立. 一般地说，质量大的粒子衰变成质量小的粒子才可能，而反之则是不可能的. 自由中子能够衰变成质子，并放出电子和反中微子（静质量为零或几乎为零），因为

$$m_n > m_p + m_e + m_\nu. \qquad (7.6.16)$$

正由于质子比中子轻，所以自由质子衰变为中子则不可能. 有趣的问题是，若质子作高速运动，以致其能量远超过中子的静能，这时衰变是否能发生？问题的答案依然是否定的. 我们不难证明，在这情况下，能量守恒与动量守恒无法兼顾. 其实从随高速质子运动的惯性系看，更容易判断质子衰变成中子是违反能量守恒的. 而衰变的可能与否，显然应与参考系无关.

2. 光子与自由电子的散射

我们讨论过程

$$\gamma + e \longrightarrow e + \gamma, \qquad (7.6.17)$$

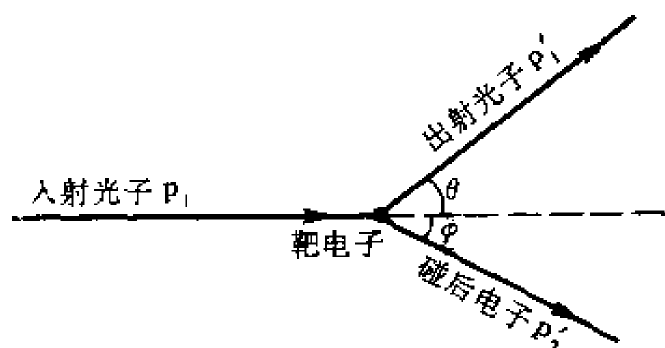


图 7.4　光子与电子的散射

设光子射向静止的电子，碰撞后改变方向出射，如图 7.4 所示. 电子被撞后获得了动量和动能. 相应地列出守恒方程如下：

$$p_1 = p_1'\cos\theta + p_2'\cos\varphi, \qquad (7.6.18)$$

$$0 = p_1'\sin\theta - p_2'\sin\varphi, \qquad (7.6.19)$$

$$p_1 + m_e c = p_1' + \sqrt{m_e^2c^2 + p_2'^2}, \qquad (7.6.20)$$

式中用 p_1 和 p_1' 分别代表入射和出射光子的动量. 考虑到光子为零质量粒子,它的 p 和 E 满足(7.6.11)式.

描述碰撞后的系统用了四个变量,即 p_1', p_2', θ, φ, 但我们只有三个方程. 这说明只利用能量和动量的守恒,而不涉及相互作用的细节,终态不能完全确定. 现在我们不想进入细节,因此把 θ 当参量来处理,以求出其他未知的量. 从(7.6.18)和(7.6.19)消去,得到

$$p_1^2 - 2p_1p_1'\cos\theta + p_1'^2 = p_2'^2. \qquad (7.6.21)$$

再把它代入(7.6.20),可解出出射和入射光子的能量比

$$\frac{E_1'}{E_1} = \frac{p_1'}{p_1} = \frac{1}{1 + \frac{E_1}{m_e c^2}(1 - \cos\theta)}. \qquad (7.6.22)$$

这结果表明,经散射后,光子的能量必有减少.

按光的量子性,光子的频率与其能量成正比,即 $E = h\nu$. 碰撞后能量的减小意味着频率的减小,这叫做康普顿效应. 在第 9 章中将看到,这结果与经典电动力学是冲突的,因此须用量子电动力学处理. 但是在很多情形下,光子的能量 E_1 远小于电子的静能 $m_e c^2$. 这时出射光应近似地与入射光有相同的频率. 这种情形叫汤姆孙散射. 经典电动力学的处理能给出正确的结果.

第 8 章　运动电荷的电磁场

8.1　李纳-维谢尔势

现在回到电动力学上来，讨论一个任意地运动着的点电荷所产生的电磁场. 这点电荷可以是宏观的荷电质点，也可以是微观粒子如电子或离子等. 后面即将看到，只要电荷有加速度，它就会产生辐射. 这是经典电动力学的一个重要推论.

我们不讨论电荷运动的动力学，而假定它的运动为已知. 设点电荷 e 的运动由

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}_e(t). \tag{8.1.1}$$

描述，我们用推迟势公式来求出它所产生的电磁标势 φ 和矢势 $\boldsymbol{A}$.

按 5.2 节，标势 φ 的形式是

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\rho(\boldsymbol{r}', t')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \mathrm{d}\tau', \tag{8.1.2}$$

其中 $t' = t - |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|/c$. 以前讨论的源是有广延的宏观物体. t 时 $\boldsymbol{r}$ 处的电磁势来自源中一切 $\boldsymbol{r}'$ 处的总贡献. 从任一 $\boldsymbol{r}'$ 处看，只有 t' 时的 ρ 值才有贡献. 这就是推迟效应. 现在的源是一个运动的点电荷. 在某时刻 t，它只在某确定的 $\boldsymbol{r}'$ 处有电量 e. 这样的电荷分布可用 δ 函数描述，

$$\rho(\boldsymbol{r}', t) = e\,\delta(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_e(t)). \tag{8.1.3}$$

考虑到推迟效应，当需要求 t 时 $\boldsymbol{r}$ 处的场时，源只在某特定时刻才有贡献，这时刻记作 t^*. 因电磁作用的传播速度为 c，t^* 与 t 和 $\boldsymbol{r}$ 的关系是

$$c(t - t^*) = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}^*|, \tag{8.1.4}$$

其中 $\boldsymbol{r}^* = \boldsymbol{r}_e(t^*)$ 是电荷在 t^* 时刻的位置. 不难论证，对确定的 t 和

$\boldsymbol{r}$，由(8.1.4)所确定的 t^* 是唯一的，即 $t^*=t^*(\boldsymbol{r},t)$.

其实在引用 δ 函数后，上面分析的结果在计算推迟势时会自动体现. 把(8.1.3)代入(8.1.2)，这运动点电荷的标势写成

$$\varphi=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_e(t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c))}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\tau'. \quad (8.1.5)$$

在这积分中，被积函数仅在 δ 函数的宗量为零的地方才有贡献. 它体现的正是上面论证的道理.

为计算带 δ 函数的积分，让我们回忆相应的一维公式

$$\int g(x)\delta(f(x))\mathrm{d}x=\int\frac{g(x)}{f'(x)}\delta(f(x))\mathrm{d}f(x)=\frac{g(x_0)}{f'(x_0)}, \quad (8.1.6)$$

其中 x_0 为 $f(x)=0$ 的根. 现在需要作三维的变量变换. 为此引入

$$\boldsymbol{r}''=\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_e(t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c), \quad (8.1.7)$$

当把积分变量由 $\boldsymbol{r}'$ 换成 $\boldsymbol{r}''$，三维的体元变换公式为

$$J\mathrm{d}\tau'=\mathrm{d}\tau'', \quad (8.1.8)$$

其中 J 是变换的雅可比行列式，即

$$J=\left\|\frac{\partial x_i''}{\partial x_j'}\right\|=\|\nabla'\boldsymbol{r}''\|, \quad (8.1.9)$$

并矢 $\nabla'\boldsymbol{r}''$ 可直接由 $\boldsymbol{r}''$ 的定义算出. 注意到 ∇' 是在 t 和 $\boldsymbol{r}$ 不变下的偏微商，有

$$\nabla'\boldsymbol{r}''=\nabla'\boldsymbol{r}'-\nabla'\boldsymbol{r}_e(t')=\overleftrightarrow{I}-(\nabla't')\boldsymbol{v}', \quad (8.1.10)$$

式中的 t' 满足 $t'=t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c$，而 $\boldsymbol{v}'=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_e(t')}{\mathrm{d}t'}$. 再令 $\boldsymbol{R}'=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$，并利用熟知的关系，$\nabla'R'=-\boldsymbol{R}'/R'$，有

$$\nabla't'=-\frac{1}{c}\nabla'R'=\frac{\boldsymbol{R}'}{cR'}, \quad (8.1.11)$$

于是得到

$$\nabla'\boldsymbol{r}''=\overleftrightarrow{I}-\frac{\boldsymbol{R}'\boldsymbol{v}'}{R'c}. \quad (8.1.12)$$

考虑到矩阵行列式的值与坐标轴的取向无关，在计算 J 时把 x 轴

取在 $\boldsymbol{v}'$ 的方向上是方便的. 在这样写出各分量后,直截了当地算出

$$J = 1 - \frac{R'_x v'_x}{cR'} = 1 - \frac{\boldsymbol{R}' \cdot \boldsymbol{v}'}{R' c}, \qquad (8.1.13)$$

这样,标势(8.1.5)中的积分就容易算了.

把上面的结果代入,(8.1.5)化成

$$\varphi = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\delta(\boldsymbol{r}'')}{R'\left(1 - \dfrac{\boldsymbol{R}' \cdot \boldsymbol{v}'}{cR'}\right)} \mathrm{d}\tau'', \qquad (8.1.14)$$

上面已指出,$\boldsymbol{r}''=0$ 意味着选取满足(8.1.4)的 t^*. 因此在积分后,对所有与源电荷有关的量都应取 t^* 时刻的值. 于是这运动点电荷产生的标势就积成

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e}{R^*\left(1 - \dfrac{\boldsymbol{R}^* \cdot \boldsymbol{v}^*}{R^* c}\right)}, \qquad (8.1.15)$$

这就是问题所要的结果. 显然,当对矢势作同样的处理,将会得到

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e\,\boldsymbol{v}^*}{R^*\left(1 - \dfrac{\boldsymbol{R}^* \cdot \boldsymbol{v}^*}{R^* c}\right)} = \frac{1}{c^2} \varphi \boldsymbol{v}^*. \qquad (8.1.16)$$

人们把这组电磁势叫作李纳-维谢尔势. 从它的形式看到,所有与源有关的量都取了 t^* 时刻的值,这正是推迟效应的体现. 此外,分母上多出一个因子 $1-\dfrac{\boldsymbol{R}^* \cdot \boldsymbol{v}^*}{R^* c}$. 若 $\boldsymbol{R}^* \cdot \boldsymbol{v}^* > 0$,它等效于把源的电量放大了. 这可理解为由源电荷的运动带来的多普勒效应.

为了与第 7 章讨论过的相对论相呼应,我们顺便指出,李纳-维谢尔势也可以用 7.1 节中的方法来导出. 上面已强调,t 时 $\boldsymbol{r}$ 处的电磁势仅与 t^* 时的电荷运动有关. 这意味着源在此前与此后的运动都不影响 t 时 $\boldsymbol{r}$ 处的电磁势. 因此,设想电荷按 $\boldsymbol{v}^*$ 作匀速运动,它将在 t 时 $\boldsymbol{r}$ 处产生同样的电磁势. 按这道理,借用 7.1 节的结果立即可得到(参看(7.1.12)及(7.1.13))

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\gamma e}{\overline{R}^*}, \tag{8.1.17}$$

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{c^2}\varphi \boldsymbol{v}^*, \tag{8.1.18}$$

其中 $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^{*2}}{c^2}}}$. 式中的 $\overline{R}^*$ 是以 $\boldsymbol{v}^*$ 运动的 $\bar{S}$ 系中 $\bar{t}^*$ 时源电荷与场点的距离. 我们需要的是用原参考系的时空坐标作自变量，为此还须作洛伦兹变换. 由于 $\overline{R}^* = c(\bar{t}-\bar{t}^*)$,对时间差作变换更方便. 相应的变换式为

$$\begin{aligned} c(\bar{t}-\bar{t}^*) &= \gamma\left[c(t-t^*) - \frac{v^*}{c}(x-x^*)\right] \\ &= \gamma\left(R^* - \frac{\boldsymbol{R}^*\cdot\boldsymbol{v}^*}{c}\right). \end{aligned} \tag{8.1.19}$$

代回原式,得到的是同样的李纳-维谢尔势. 在作这样的分析时，我们更清楚地看到,多普勒因子是由源对参考系的运动而造成的.

8.2 运动电荷的电磁场

由电磁势 φ 和 $\boldsymbol{A}$ 求场强 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的公式是

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}, \tag{8.2.1}$$

$$\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}. \tag{8.2.2}$$

运动电荷产生的李纳-维谢尔势已在上节中得到. 这里把它重写作

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{s^*}, \tag{8.2.3}$$

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{c^2}\varphi\boldsymbol{v}^*, \tag{8.2.4}$$

其中

$$s^* = R^* - \boldsymbol{R}^*\cdot\boldsymbol{v}^*/c, \tag{8.2.5}$$

$$\boldsymbol{R}^* = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}^*. \tag{8.2.6}$$

原则上由李纳-维谢尔势代入，即可求出 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$，但是这推导远不是直截了当的.

运算的复杂性主要来自自变量. 由于推迟效应，在所得到的电磁势 φ 和 $\boldsymbol{A}$ 中，与源有关的量都取 t^* 时刻的值，即它们是作为 $\boldsymbol{r}$ 和 t^* 的函数的显示式. 而(8.2.1)和(8.2.2)中的偏微商却是以 t 和 $\boldsymbol{r}$ 为自变量作的. 为此须先注意到函数的复合性，

$$t^* = t^*(\boldsymbol{r},t), \tag{8.2.7}$$

$$\boldsymbol{r}^* = \boldsymbol{r}_e(t^*(\boldsymbol{r},t)), \tag{8.2.8}$$

$$\boldsymbol{v}^* = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_e(t^*)}{\mathrm{d}t^*} = \boldsymbol{v}^*(t^*(\boldsymbol{r},t)), \tag{8.2.9}$$

其中 $\boldsymbol{r}_e(t)$ 是描写电荷运动的已知函数. t^* 对 t 和 r 的依赖由推迟关系(8.1.4)决定，但是一般不能得出形如(8.2.7)的显示式. 这就是运算无法直截了当进行的原因. 从物理上讲，我们期望得到的也是 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 对 t^* 时的电荷位置 $\boldsymbol{r}^*$ 和速度 $\boldsymbol{v}^*$ 的依赖关系. 为此我们对所需的偏微商运算作如下处理.

对于形如

$$f = f(\boldsymbol{r}, t^*(\boldsymbol{r},t)) \tag{8.2.10}$$

的复合函数，当保持 $\boldsymbol{r}$ 不变而对 t 求偏微商时，须用

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial t^*}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t^*}. \tag{8.2.11}$$

类似地，当保持 t 不变而对 $\boldsymbol{r}$ 求偏微商时，须用

$$\nabla = \nabla_* + (\nabla t^*)\frac{\partial}{\partial t^*}, \tag{8.2.12}$$

其中 ∇_* 指保持 t^* 不变下对 $\boldsymbol{r}$ 的偏微商. 这样的运算中涉及了 $\dfrac{\partial t^*}{\partial t}$ 和 ∇t^*. 它们须由 t^* 对 t 和 $\boldsymbol{r}$ 的隐函数关系导出.

把(8.1.4)式写成

$$t^* = t - \frac{R^*}{c} = t - \frac{1}{c}|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_e(t^*)|, \tag{8.2.13}$$

保持 $\boldsymbol{r}$ 不变对 t 求偏微商，有

$$\frac{\partial t^*}{\partial t} = 1 - \frac{1}{c}\frac{\partial R^*}{\partial t^*}\frac{\partial t^*}{\partial t}, \tag{8.2.14}$$

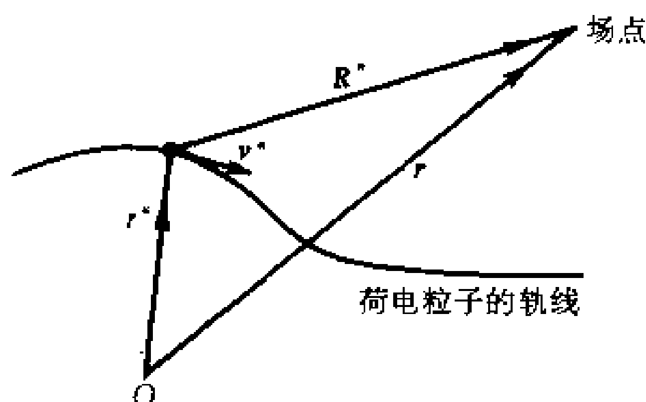


图 8.1 R^*的变化

式中的$\frac{\partial R^*}{\partial t^*}$是$\boldsymbol{r}$不变下的偏微商. 从图 8.1 看,它是矢量$\boldsymbol{R}^*$尾端的变化引起$\boldsymbol{R}^*$的变化,而其尖端不动. 这样得出

$$\frac{\partial R^*}{\partial t^*} = -\frac{\boldsymbol{R}^* \cdot \boldsymbol{v}^*}{R^*}, \tag{8.2.15}$$

代回(8.2.14),解出

$$\frac{\partial t^*}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{\boldsymbol{R}^* \cdot \boldsymbol{v}^*}{R^*}} = \frac{R^*}{s^*}, \tag{8.2.16}$$

这是一个所要的结果. 随之还可得到另一有用的关系

$$\frac{\partial R^*}{\partial t} = \frac{\partial R^*}{\partial t^*}\frac{\partial t^*}{\partial t} = \frac{\boldsymbol{R}^* \cdot \boldsymbol{v}^*}{s^*}. \tag{8.2.17}$$

然后求 ∇t^*. 考虑到求微时保持t不变,由(8.2.13)式得出

$$\nabla t^* = -\frac{1}{c}\nabla R^*. \tag{8.2.18}$$

按(8.2.12)对$R^* = R^*(\boldsymbol{r}, t^*(\boldsymbol{r}, t^*))$求梯度,有

$$\nabla R^* = \nabla_* R^* + \frac{\partial R^*}{\partial t^*}\nabla t^*, \tag{8.2.19}$$

其中$\nabla_* R^*$是保持t^*不变下的运算. 仍从图 8.1 看,它是矢量$\boldsymbol{R}^*$的尖端的变化引起的,因此有

$$\nabla_* R^* = \boldsymbol{R}^*/R^*. \tag{8.2.20}$$

把它和(8.2.15)代入(8.2.19)，则与(8.2.18)联立解出

$$\nabla t^* = -\frac{\boldsymbol{R}^*}{cs^*}, \tag{8.2.21}$$

$$\nabla R^* = \frac{\boldsymbol{R}^*}{s^*}. \tag{8.2.22}$$

这样我们先算出了$\frac{\partial t^*}{\partial t}$，$\frac{\partial R^*}{\partial t}$，$\nabla R^*$和$\nabla t^*$，它们是在用李纳-维谢尔势计算$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{B}$时需要的.

有了上面的准备，通过复合函数求微来计算$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{B}$已直截了当了. 但是计算仍很繁复. 下面适当地写出几个中间结果，以供读者参考. 把李纳-维谢尔势代入，电场强度$\boldsymbol{E}$先被化作

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{s^{*2}}\left(\nabla s^* + \frac{1}{c^2}\frac{\partial s^*}{\partial t}\boldsymbol{v}^* - \frac{1}{c^2}R^*\boldsymbol{a}^*\right), \tag{8.2.23}$$

式中的$\boldsymbol{a}^* = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}^*}{\mathrm{d}t^*}$是$t^*$时的加速度. 需要进一步算出$\frac{\partial s^*}{\partial t}$和$\nabla s^*$. 利用上面的准备已不难算出

$$\nabla_* s^* = \frac{\boldsymbol{R}^*}{R^*} - \frac{\boldsymbol{v}^*}{c}, \tag{8.2.24}$$

$$\frac{\partial s^*}{\partial t^*} = -\left(\frac{\boldsymbol{R}^*}{R^*} - \frac{\boldsymbol{v}^*}{c}\right)\cdot\boldsymbol{v}^* - \frac{\boldsymbol{R}^*\cdot\boldsymbol{a}^*}{c}. \tag{8.2.25}$$

代入、化简并整理后，最后得出电场强度，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} = &\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{s^{*3}}\left\{\left(1 - \frac{v^{*2}}{c^2}\right)\left(\boldsymbol{R}^* - \frac{R^*}{c}\boldsymbol{v}^*\right)\right. \\ &\left. + \frac{1}{c^2}\boldsymbol{R}^* \times \left[\left(\boldsymbol{R}^* - \frac{R^*}{c}\boldsymbol{v}^*\right)\times\boldsymbol{a}^*\right]\right\}.\end{aligned} \tag{8.2.26}$$

我们不再给出计算磁感应强度$\boldsymbol{B}$过程. 最后得到的$\boldsymbol{B}$可用$\boldsymbol{E}$表示成

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{c}\frac{\boldsymbol{R}^*}{R^*}\times\boldsymbol{E}. \tag{8.2.27}$$

这就是一个任意运动的点电荷所产生的电磁场.

就像静止点电荷的库仑定律是整个静电学的基础一样，这运动电荷的电磁场公式无疑也很基本. 这公式的形式较复杂，重要

的是理解它的内涵. 我们将在下节中先分析其中依赖速度的部分,然后在 8.5 和 8.6 节中讨论与加速度有关的场.

8.3 匀速运动电荷的电磁场

在这节中,我们把上面的结果用于 $a^*=0$ 的情形,讨论一个匀速运动的点电荷所产生的电磁场. 这时电场公式(8.2.26)简化为

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{s^{*3}}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(\boldsymbol{R}^*-\frac{R^*}{c}\boldsymbol{v}\right). \qquad (8.3.1)$$

因电荷的运动速度不变,所以对式中的速度 $\boldsymbol{v}$ 不加星号. 磁场是通过电场表示的,不用重写.

我们考虑 t 时刻的场的分布与同时刻电荷位置的关系. 把坐标原点 O 取在 t 时刻的电荷上(参考系不改变). 场点 P 与 O 的相对位置用 $\boldsymbol{r}$ 标记. 由于推迟作用,t 时在 P 点的场是由源电荷尚在 A 点时产生的. 图 8.2 示出了相应的几何关系. 在推迟时间 R^*/c

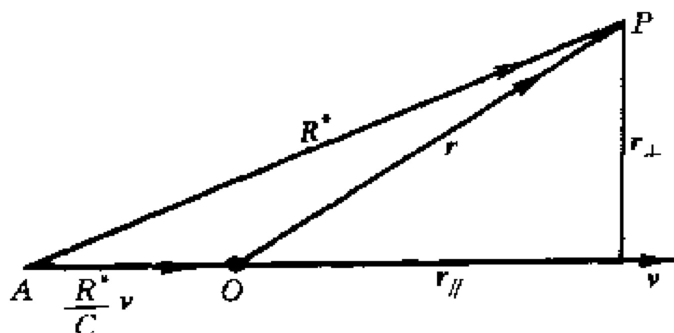


图 8.2 匀速电荷的推迟效应

内,电荷从 A 运动到 O,因此

$$AO=R^*\frac{v}{c}. \qquad (8.3.2)$$

由图上的几何关系看出

$$\boldsymbol{R}^*-\frac{R^*}{c}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{r}. \qquad (8.3.3)$$

这关系使我们看到,电场的方向是在以同时刻电荷位置为心的径向.

然后我们希望把 $\boldsymbol{E}$ 的大小也用 $\boldsymbol{r}$ 来表示,而不保留 $\boldsymbol{r}^*$. $\boldsymbol{R}^*$ 在

速度方向上的投影是

$$\boldsymbol{R}^* \cdot \frac{\boldsymbol{v}}{v} = \frac{R^* v}{c} + r_{/\!/}, \tag{8.3.4}$$

其中 $r_{/\!/}$ 是 $\boldsymbol{r}$ 在速度方向的投影. 把它代入 s^* 的定义得到

$$s^* = R^* - \frac{\boldsymbol{R}^* \cdot \boldsymbol{v}}{c} = R^*\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - \frac{v}{c} r_{/\!/}. \tag{8.3.5}$$

另一方面利用 $\boldsymbol{R}^* = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{R}^* \cdot \boldsymbol{v}/c$ (即(8.3.3)式). 在对两边求长度平方后得

$$R^{*2} = r^2 + \frac{R^{*2} v^2}{c^2} + \frac{2R^* r_{/\!/} v}{c}. \tag{8.3.6}$$

由这 R^* 的二次代数方程中可解出 R^*,代入(8.3.5)并整理后有

$$s^* = \sqrt{r_\perp^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + r_{/\!/}^2} = \frac{1}{\gamma}\sqrt{r_\perp^2 + \gamma^2 r_{/\!/}^2}. \tag{8.3.7}$$

这样,以 t 时的源电荷为基准,t 时的电场强度表示为

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\gamma e \boldsymbol{r}}{(r_\perp^2 + \gamma^2 r_{/\!/}^2)^{3/2}}, \tag{8.3.8}$$

利用(8.3.3),注意到 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 方向一致,求出该时刻的磁感应强度为

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{c}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{R^*} + \frac{\boldsymbol{v}}{c}\right) \times \boldsymbol{E} = \frac{1}{c^2} \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E}, \tag{8.3.9}$$

这是同一时刻电荷位置与场强的关系. 注意推迟效应已考虑在内了. 图 8.3 画出了若干点上的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的方向.

我们对这结果的含义作几点讨论.

1. 非相对论近似

当电荷的速度远小于光速,即 γ 很接近于 1,电场强度 $\boldsymbol{E}$ 回到库仑律. 这说明只要电荷不以接近 c 的速度运动,静电规律总是适用的. 这一结果很重要. 例如讨论介质中的电子或离子. 它们必然有热运动而不会静止. 只要热运动显著低于光速,库仑定律就依然适用. 非相对论情形下的磁感应强度为

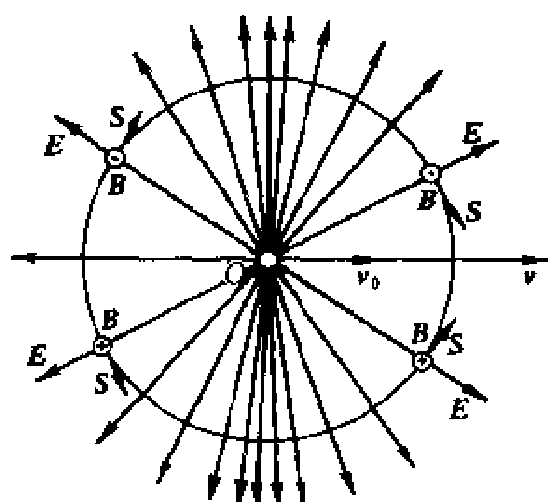


图 8.3 运动电荷的电磁场和能流

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{r}}{r^3} \tag{8.3.10}$$

它与元电流 $\boldsymbol{j}\mathrm{d}\tau = e\boldsymbol{v}$ 时的毕奥-萨伐尔定律一致，尽管这并不是稳定电流.

2. 场强大小的分布

把 $\boldsymbol{v}$ 的方向作为极轴，电场强度（大小）的分布可写成

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e}{r^2} \frac{\gamma}{(\gamma^2\cos^2\theta + \sin^2\theta)^{3/2}}. \tag{8.3.11}$$

它与库仑定律的差别体现为 E 随方向而异，且这种方向上的不均匀性随 γ 的增大而加强. 当 $\gamma \gg 1$，在 $\theta = \pi/2$ 的方向上，

$$E = \gamma \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e}{r^2} \gg \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e}{r^2}; \tag{8.3.12}$$

在 $\theta = 0$ 或 π 的方向上，

$$E = \frac{1}{\gamma^2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e}{r^2} \ll \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e}{r^2}. \tag{8.3.13}$$

磁场随方向的分布趋势也有向 $\theta = \pi/2$ 面集中的倾向. 图 8.3 示意地画出了电力线的不均匀分布.

3. 能量的流动

匀速电荷的电磁场是随电荷移动的，因此电磁场必有能量的

流动．能流密度 $\boldsymbol{S}$ 在 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ 的方向上．图 8.3 中示出了它们的方向．这里看到，没有径向流出的能量，即没有辐射．能流只反映场的能量随电荷的运动而迁移．注意，若匀速运动的电荷有辐射，那么就须有外力才能维持匀速．这样，电动力学就和牛顿第一定律冲突了．

上面的讨论引申出一个有意思的概念．电荷周围有电磁场，且它随电荷运动．按照相对论的质能关系，这电磁场也有质量，记作 $m_{场}$．设电子自身有质量 $m_{自}$．由于这两部分质量必同时存在并同样运动，实际测到的电子的惯性质量应是 $m_e=m_{场}+m_{自}$．从概念上讲，这意味着带电体的惯性至少有一部分来自它周围的场．若把电子当点电荷，算出 $m_{场}$ 是无穷，而与事实不符．人们自然地认为应把电子看成半径为 r_0 的小球．计算表明，若 $r_0<\frac{e^2}{m_e c^2}\approx 10^{-13}\ \mathrm{cm}$，则 $m_{场}>m_e=9\times10^{-28}\ \mathrm{g}$．现今的高能实验已测得电子半径比 $10^{-13}\ \mathrm{cm}$ 小几个量级．因此事实已清楚表明理论上的 $m_{场}$ 与事实不符．算出的 $m_{场}$ 过大，完全来自微观尺度上过强的场强．我们将在本书的末尾讨论经典电动力学的适用范围．这里的问题正是一例，它反映出麦克斯韦电磁理论在微观尺度上的不适用．微观客体须用量子场论来研究．有趣的是微观研究表明，粒子的质量至少部分来自它与其他场的相互作用，这是一个正确的概念．

8.4 运动电荷的辐射功率

当点电荷有加速度 $\boldsymbol{a}^*$，它会附加地产生一部分电磁场

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{s^{*3}}\frac{1}{c^2}\boldsymbol{R}^*\times\left[\left(\boldsymbol{R}^*-\frac{R^*}{c}\boldsymbol{v}^*\right)\times\boldsymbol{a}^*\right], \tag{8.4.1}$$

$$\boldsymbol{B}=\frac{1}{c}\frac{\boldsymbol{R}^*}{R^*}\times\boldsymbol{E}. \tag{8.4.2}$$

记得 $s^*=R^*\left(1-\frac{\boldsymbol{v}^*\cdot\boldsymbol{R}^*}{cR^*}\right)$．在远处，$E$ 和 B 与 R^* 成反比．$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$

的方向与 $\boldsymbol{R}^*$ 成两两正交的右手系．由此看出，在任意大的球面上，这电磁场有有限大的能量流出．这说明与加速度相关的电磁场是一种辐射场．本节将导出计算运动点电荷辐射功率的一般公式．

第 5 章中讨论辐射问题时，源的空间位置是不变的．因此可以作一个固定的大球面，用单位时间从球面流出的能量反映源的辐射功率．当源在运动，那样导出的公式将不再适用．下面我们重新分析这问题．

考虑电荷在 t^* 至 $t^*+\Delta t$ 间隔内辐射的能量．电荷在 t^* 时位于 $\boldsymbol{r}^*=\boldsymbol{r}_e(t^*)$ 处．以它为中心 O，以 $R^*=c(t-t^*)$ 为半径作一球面（图 8.4）．t^* 时这电荷产生的辐射场在 $t=t^*+R^*/c$ 时正好达

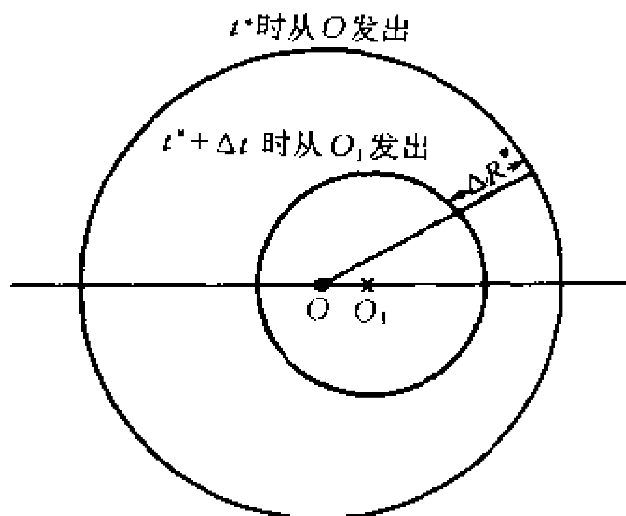


图 8.4　同一时刻的两个波阵面

到该球面．过时间 Δt 后，电荷运动至 $\boldsymbol{r}^*+\boldsymbol{v}^*\Delta t$ 处（图上的 O_1）．同样看 t 时刻，$t^*+\Delta t$ 时产生的辐射场传至以 O_1 为心，以 $c(t-t^*-\Delta t)$ 为半径的球面上．由此直观地看出，源电荷在 t^* 至 $t^*+\Delta t$ 时间内放出的辐射能就是 t 时这两个球面之间的场能．

按照这样的道理，它在 t^* 时向任意方向的小立体角 $\mathrm{d}\Omega$ 内辐射的功率为

$$\mathrm{d}P = wR^{*2}\mathrm{d}\Omega\,\frac{\Delta R^*}{\Delta t}, \tag{8.4.3}$$

其中 w 是 t 时的场能密度，ΔR^* 是两个不同心球面间的距离. 从图上看出，由于源的运动，时间间隔 Δt 引起的 ΔR^* 为

$$\Delta R^* = \left(c - \frac{\boldsymbol{v}^* \cdot \boldsymbol{R}^*}{R^*}\right)\Delta t. \tag{8.4.4}$$

代入得到单位立体角内的辐射功率是

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = wR^{*2}\left(c - \frac{\boldsymbol{v}^* \cdot \boldsymbol{R}^*}{R^*}\right). \tag{8.4.5}$$

在一切方向上的总辐射功率为

$$P = \iint wR^{*2}\left(c - \frac{\boldsymbol{v}^* \cdot \boldsymbol{R}^*}{R^*}\right)\mathrm{d}\Omega. \tag{8.4.6}$$

这就是我们所要的运动电荷的辐射功率公式. 当源的速度 $v=0$，它回到前面用过的公式. 把这两种公式相比，又一次看到所差的是由源的运动引起的多普勒因子 $1-\frac{\boldsymbol{v}^* \cdot \boldsymbol{R}^*}{cR^*}$. 若点电荷做非相对论性的运动，即 $v \ll c$，则多普勒因子可近似为 1. 本节的公式也回到以前的公式.

辐射场的能量和能流密度用 1.5 节的结果计算. 记得由 (8.4.1)和 (8.4.2)描述的辐射场仍有 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{R}^*$ 互相垂直，以及 $cB = E$，因此辐射场能量密度和能流密度仍是

$$w = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right) = \varepsilon_0 E^2, \tag{8.4.7}$$

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} = wc\,\frac{\boldsymbol{R}^*}{R^*}. \tag{8.4.8}$$

在下面两节中，我们将分别讨论低速和高速情形下的辐射特征.

8.5 非相对论性粒子的辐射

这一节中讨论粒子速度 v 远小于光速 c 时的辐射. 这就是加速粒子辐射的非相对论情形. 从相对论力学知，低速意味着 $\gamma \approx 1$，即粒子的动能远小于静能. 以电子为例，它的静能为 0.5 MeV.

当它被加速到例如 10 keV 以下，常依然可归属于低速情形．因此，非相对论情形包含了一大类实际问题．事实上若不讨论天体现象，几乎只有加速器才能制造出相对论性的带电粒子．

在非相对论情况下，加速度引起的电磁场简化为

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e\boldsymbol{R}^*\times(\boldsymbol{R}^*\times\boldsymbol{a}^*)}{c^2R^{*3}}, \tag{8.5.1}$$

$$\boldsymbol{B}=\frac{1}{c}\frac{\boldsymbol{R}^*}{R^*}\times\boldsymbol{E}. \tag{8.5.2}$$

从这式子首先看出，低速粒子的辐射场与它的速度无关，而仅与其加速度有关．因此当考虑 t^* 时的辐射，宜以该时加速度 $\boldsymbol{a}^*$ 的方向为基准来分析．

把 $\boldsymbol{R}^*$ 对 $\boldsymbol{a}^*$ 的方向角记作 θ，则电场强度的大小写成

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ea^*\sin\theta}{c^3R^*}, \tag{8.5.3}$$

由它算出能量密度

$$w=\varepsilon_0E^2=\frac{1}{16\pi^2\varepsilon_0}\cdot\frac{e^2a^{*2}\sin^2\theta}{c^4R^{*2}}, \tag{8.5.4}$$

代入上一节得到的功率公式(8.4.5)，并忽略低速运动的多普勒因子，即得到辐射的角分布

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}=cwR^{*2}=\frac{1}{16\pi^2\varepsilon_0}\cdot\frac{e^2a^{*2}\sin^2\theta}{c^3}, \tag{8.5.5}$$

它是以加速度方向为基准而与 $\sin^2\theta$ 成正比的．对一切方向积分后，得到辐射总功率

$$P=\frac{1}{6\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{e^2a^{*2}}{c^3}, \tag{8.5.6}$$

它的大小与加速度平方正比，这常被称为辐射的拉莫尔公式．

对于运动电荷，可以把 $\boldsymbol{p}=e\boldsymbol{r}_e(t)$ 作为粒子的偶极矩．上式中的 $ea^*=\ddot{p}^*$，若把本节得到的结果用 $\ddot{\boldsymbol{p}}^*$ 表示，它与谐振源的偶极辐射公式(5.6.14)或(5.6.15)一致．因此非相对论性粒子的辐射也被看作偶极辐射．

作为应用，质子或离子在回旋加速器中做圆轨道运动时的辐射是典型例子．辐射来自圆运动的向心加速度．实测表明它在低速运动时的辐射与理论是相符的．值得指出，这些公式在某些现象中得到很好的证实，同时人们也发现有的问题中有矛盾出现．为此我们讨论一下经典的原子模型．

在卢瑟福发现原子中有核存在后，人们顿时想到了原子的行星模型．但是电磁理论告诉我们，当电子绕原子核转动，向心加速度将导致辐射．电子在辐射中失去能量，其运动半径将逐渐减小．这也就是说，行星般的原子模型是不稳定的．让我们用本节的理论估算一下原子能够存在的时间．

按牛顿力学，电子应绕核作椭圆运动．为作简单估算，假定它绕核作圆运动．这样，由动力学方程

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2} \tag{8.5.8}$$

推知，电子的总机械能为

$$U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}. \tag{8.5.9}$$

实验测得，氢原子的结合能是 $B=-U=13.6\,\mathrm{eV}$．由这数据定出氢内电子的轨道半径和运动速度为

$$r_0 = 0.52 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}, \tag{8.5.10}$$

$$v_0 = 2.2 \cdot 10^6\,\mathrm{m/s}, \tag{8.5.11}$$

因此原子内的电子是非相对论的．把向心加速度 $a=v^2/r$ 代入拉莫尔公式，得

$$P = \frac{e^6}{96\pi^3\varepsilon_0^3 c^3 m^2} \cdot \frac{1}{r^4}. \tag{8.5.10}$$

辐射使电子的能量 U 减小，即 $\mathrm{d}U/\mathrm{d}t=-P$．由此导出其半径变化的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\frac{e^4}{12\pi^2\varepsilon_0^2 c^3 m^2} \cdot \frac{1}{r^2}, \tag{8.5.11}$$

易于解出，电子轨道从 r_0 减小到零所需的时间为

$$\tau = \frac{4\pi^2 \varepsilon_0^2 m^2 c^3 r_0^3}{e^4} = 1.5 \times 10^{-11}\ \mathrm{s}. \tag{8.5.12}$$

这过短的寿命说明经典行星模型与事实是尖锐地冲突的.

人们从原子物理事实中发现,不仅经典理论无法理解原子的稳定性,而且原子的辐射频率也完全无法由电磁理论解释. 历史上,原子的量子理论正是在研究这种矛盾中发展起来的. 今天人们已弄清,牛顿力学和麦克斯韦的电动力学都是宏观现象的理论,原则上它们不适用于微观客体. 人们从实践认识到,当微观粒子在宏观尺度上运动(例如在宏观大的磁场中),则经典理论可作为近似而适用;当它们在微观尺度上运动(例如在原子内),那么经典的力学和电动力学是完全不适用的.

8.6 相对论性的粒子的辐射

当粒子运动的速率很接近光速,它的辐射与非相对论情形有很大不同. 这时与加速度有关的电磁场已由(8.4.1)和(8.4.2)给出. 现在我们讨论它的辐射的性质. 在这问题中,将把速度 $\boldsymbol{v}^*$ 的方向作为基准,而把加速度 $\boldsymbol{a}^*$ 分解为 $a_{\parallel}$ 和 $a_{\perp}$ 两部分. 这样讨论在理论上是方便的,在实用上也是有意义的.

1. 加速度与速度平行时的辐射

当加速度的方向与速度一致,电场公式简化为

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e a^* \sin\theta}{c^2 R^{*2}\left(1 - \frac{v^*}{c}\cos\theta\right)^3}, \tag{8.6.1}$$

其中 θ 是 $\boldsymbol{a}^*$(和 $\boldsymbol{v}^*$)与 $\boldsymbol{R}^*$ 方向的夹角. 这结果与非相对论情形相比,仅在分母上多了多普勒因子 $1-\frac{v^*}{c}\cos\theta$ 的三次方. 注意到辐射功率公式(8.4.5)中也包含有同样的因子,于是在算出场能密度后导出

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3}\cdot\frac{a^{*2}\sin^2\theta}{\left(1-\frac{v^*}{c}\cos\theta\right)^5},\tag{8.6.2}$$

对一切方向作积分，得到总辐射功率

$$P=\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{a^{*2}}{\left(1-\frac{v^{*2}}{c^2}\right)^3}.\tag{8.6.3}$$

形式上看来，这些结果与非相对论情形很相似，但实际行为却有着很大的差别.

首先看总功率. 相对论性的辐射功率 P 与同样加速度下的非相对论性结果 $P_{\text{n.r.}}$ 相比，有

$$P=\gamma^6 P_{\text{n.r.}}.\tag{8.6.4}$$

这表明在同样的加速度下，辐射功率很敏感地依赖于 γ. 注意 γ 永远大于 1. 例如当 $\gamma=1.1$，相应的速度是 $v/c=0.42$. 这速度已接近光速，但 γ^6 的值仅为 1.8，辐射功率比非相对论情形的增大仍并不显著. 若 $\gamma=2$（即其动能等于静能），辐射功率将比非相对论情形大两个量级. 人们常把 $\gamma\gg1$ 称为极端相对论情形. 这时粒子的辐射强度比低速情形有很多量级的增大.

再看辐射的方向性的差别. 在非相对论下的辐射是偶极辐射. 我们已经知道，辐射在 $\theta=\pi/2$ 方向最强，不同方向上的强度差别并不尖锐. 让我们把它与极端相对论情形对比.

当 $\gamma\gg1$ 时可采用 $\varepsilon=1/\gamma^2$ 为参量，它是小量，因此 $v^*/c=\sqrt{1-\varepsilon}\approx1-\frac{\varepsilon}{2}$. 不难对(8.6.2)求极值，定出辐射最强的方向（以 θ_m 记）为

$$\cos\theta_m=\frac{\sqrt{16-15\varepsilon}-1}{3(1-\varepsilon/2)}\approx1-\frac{\varepsilon}{8},\tag{8.6.5}$$

后一等式的得出是对 ε 作展开而只保留了领头项. 由此看出 θ_m 也是小量. 再利用 $\cos\theta_m=1-\theta_m/2$，即有

$$\theta_m\approx\frac{1}{2\gamma},\tag{8.6.6}$$

现在看清了，当 $\gamma \gg 1$，辐射最强方向已远偏离 $\theta=\pi/2$，而显著地倾向于速度方向. 图 8.5 示意地画出了 γ 较大时的辐射角分布. 图上还示出了另一个特征：相对论性辐射有强烈的方向集中. 把 $\theta \gg \theta_m$ 的方向与辐射最强方向作比较，比例因是 γ^8. 这说明几乎全部辐射能是朝 θ_m 方向附近发出的，而这方向非常接近速度的方向.

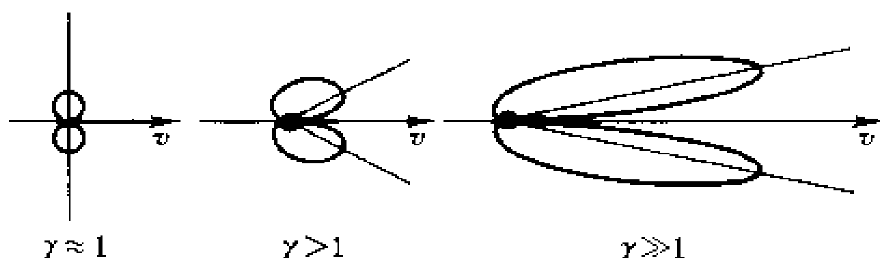


图 8.5 直线加速时的辐射强度分布

为了对比，图中也画上了非相对论性辐射的角分布. 它的特征与极端相对论情形差别很大. 当然，这差别是随 γ 的增大而逐渐出现的.

2. 加速度与速度垂直的情形

这情形的典型代表是电子在磁场中的运动. 由于磁场提供的是向心力，从而必引起向心加速度. 现在讨论这种加速度产生辐射.

利用 $\boldsymbol{v}^* \cdot \boldsymbol{a}^* = 0$，电场强度的平方可化作

$$E^2 = \frac{e^2\left[\left(1-\frac{\boldsymbol{v}^* \cdot \boldsymbol{R}^*}{cR^*}\right)a^{*2} - \left(1-\frac{v^{*2}}{c^2}\right)\left(\boldsymbol{a}^* \cdot \frac{\boldsymbol{R}^*}{R^*}\right)\right]}{16\pi^2\varepsilon_0^2c^4R^{*2}\left(1-\frac{\boldsymbol{v}^* \cdot \boldsymbol{R}^*}{cR^*}\right)^6}, \tag{8.6.7}$$

瞬时地取 $\boldsymbol{a}^*$ 方向为 x 轴，取 $\boldsymbol{v}^*$ 方向为 z 轴，则对任意方向上的观测点有

$$\boldsymbol{R}^* = R^*(\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta). \tag{8.6.8}$$

在这坐标系中，辐射强度的角分布为

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{e^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3}\cdot\frac{a'^2}{\left(1-\frac{v'}{c}\cos\theta\right)^3}\left[1-\frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi\left(1-\frac{v'^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{v'}{c}\cos\theta\right)^2}\right],$$

(8.6.9)

再对所有方向作积分，得到总辐射功率为

$$P=\gamma^4 P_{\mathrm{n.r.}}.\tag{8.6.10}$$

从上面的结果看到，$a_{\perp}$ 的辐射和 $a_{/\!/}$ 的辐射也很不同. 首先，前者的总辐射功率正比于 γ^4，而后者则正比与 γ^6. 其次看辐射的方向性. $\boldsymbol{a}'$ 与 $\boldsymbol{v}'$ 垂直时的辐射场是非轴对称的. 图 8.6 画出了在 $\varphi=0$ 或 π 的平面(即 $\boldsymbol{v}'$-$\boldsymbol{a}'$ 平面)上的辐射随方向的分布. 当 $\gamma\gg 1$，它的辐射也有尖锐的方向性，且主要的辐射也朝速度方向发出. 这是极端相对论性辐射的共同特征. 但是现在速度方向在变化，

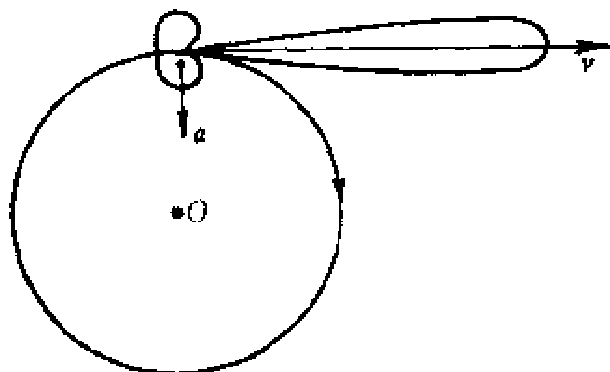


图 8.6　运动平面上的辐射强度分布

因此辐射的方向也在变化. 举例讲，如果辐射源是远处天体中做圆运动的高速电子，那么只有它的速度指向我们时，我们才会收到信号. 由于速度方向是周期地变化的，因此观测者接收到的将是脉冲式的信号.

3. 一般情形

当 $a_{\perp}$ 和 $a_{/\!/}$ 都存在，我们不加证明地指出，总辐射功率是两者分别贡献的简单相加$\left(\text{注意}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}\text{并不具有这样的性质}\right)$，即

$$P=\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}(\gamma^6 a_{/\!/}^2+\gamma^4 a_\perp^2)=P_{/\!/}+P_\perp. \qquad (8.6.11)$$

下面讨论一下，在这两部分贡献中以哪部分为主.

加速度 $a_{/\!/}$ 和 $a_\perp$ 的大小是由力决定的. 按相对论力学有

$$\boldsymbol{F}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma m_0\boldsymbol{v})=m_0\gamma\boldsymbol{a}+m_0\gamma^3\left(\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}}{c}\right)\frac{\boldsymbol{v}}{c}, \qquad (8.6.12)$$

这里利用了

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}=\gamma^3\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}}{c^2}. \qquad (8.6.13)$$

把方程分解为平行或垂直速度方向的两部分，投影并整理后得到

$$F_{/\!/}=m_0\gamma^3 a_{/\!/}, \qquad (8.6.14)$$

$$F_\perp=m_0\gamma a_\perp. \qquad (8.6.15)$$

从这动力学方程看出，两部分功率之比是

$$\frac{P_{/\!/}}{P_\perp}=\left(\frac{\gamma a_{/\!/}}{a_\perp}\right)^2=\left(\frac{F_{/\!/}}{\gamma F_\perp}\right)^2. \qquad (8.6.16)$$

这结果表明，辐射功率以 $a_{/\!/}$ 的贡献为主的条件为

$$F_{/\!/}\gg\gamma F_\perp, \qquad (8.6.17)$$

如果 γ 很大，而 $F_{/\!/}$ 与 $F_\perp$ 同量级，则辐射以 $a_\perp$ 的贡献为主.

8.7 辐射阻尼力

荷电粒子作加速运动时必有辐射，而辐射要使粒子损失能量及动量. 从这粒子的动力学讲，这事实相当于粒子受到了一个附加的阻尼力，这就是辐射阻尼的概念. 辐射阻尼力不来自外界，而是来自自身的辐射，所以它是一种自作用力. 困难的问题在于辐射阻尼力如何表达? 这是一直没有很好解决的问题. 下面我们对它作一个简单的讨论.

让我们从能量的角度考虑. 辐射阻尼力的主要性质之一是它对带电质点所作的负功应等于质点在同时间内辐射出去的能量. 为简单起见，我们考虑非相对论情形. 由辐射功率的拉莫尔公式，

辐射阻尼力 F_r 的功是

$$F_r \cdot v \mathrm{d}t = -\mathrm{d}U = -m\tau a^2 \mathrm{d}t, \qquad (8.7.1)$$

其中 U 是粒子的能量，τ 的定义为

$$\tau = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3 m}, \qquad (8.7.2)$$

易于从(8.7.1)式看出，τ 具有时间的量纲.

为了找到对怎么写辐射阻尼力的启示，我们看带电粒子作周期运动的情形. 对辐射在一个周期(t_1 至 t_2)内放出的能量作分部积分. 由 $a^2\mathrm{d}t = \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{v}$，得到如下的关系：

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}_r \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}t = -m\tau \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v}\Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} m\tau \dot{\boldsymbol{a}} \cdot \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}t, \qquad (8.7.3)$$

其中 $\dot{\boldsymbol{a}}$ 是加速度的变化率. 若粒子严格作周期运动，等式右边第一项为零. 由这关系式的启示，辐射阻尼力可写成

$$\boldsymbol{F}_r = m\tau\dot{\boldsymbol{a}}. \qquad (8.7.4)$$

这里须注意，由于辐射消耗了粒子的能量，粒子的 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v}$ 在一个周期后不会完全复原. 因此，(8.7.3)式右边第一项不能严格为零. 可以论证，若运动周期 $T \gg \tau$，该项相对(8.7.3)式左边是可忽略的小量. 这样，由(8.7.4)定义的 F_r 能作为辐射阻尼力的近似描述. $T \gg \tau$ 的条件是容易满足的. 以电子为例，用(8.7.2)式算出 $\tau \approx 10^{-23}$ s. $T \gg 10^{-23}$ s. 意味着角频率 $\omega \ll 10^{22}\,\mathrm{s}^{-1}$，或其辐射波长 $\lambda \gg 10^{-4}$ A.

下面作为例子，讨论辐射阻尼力对简谐振子的影响. 设电子在简谐力 $-m\omega_0^2 x$ 作用下作振动. 考虑到辐射阻尼力的存在，它的动力学方程为

$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x + m\tau\dddot{x}, \qquad (8.7.5)$$

$\tau \ll T$ 意味着辐射阻尼力远小于简谐力. 我们可采用近似解法. 以忽略辐射阻尼为零级近似，所得的是熟悉的简谐振动解

$$x^{(0)} = A_0 \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\omega_0 t}, \qquad (8.7.6)$$

在这近似下，$\dddot{x} \approx -\omega_0^2 \dot{x}$，辐射阻尼力可改写成 $-m\tau\omega_0^2\dot{x}$. 于是一

级近似的方程可写成

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - \omega_0^2 \tau \dot{x}, \tag{8.7.7}$$

这是标准的阻尼振动方程. 它的解是

$$x(t) = A_0 e^{-\frac{\gamma t}{2}} e^{\pm i\omega_0 t}, \tag{8.7.8}$$

其中

$$\gamma = \omega_0^2 \tau, \tag{8.7.9}$$

由于 τ 远小于周期 T,所以有 $\gamma \ll \omega_0$. 所得的是有小阻尼的振动解. 辐射消耗了振子的能量,振子的振幅自然要减小. 若不引入辐射阻尼力,这一点就无法体现.

上面的讨论说明,由于辐射阻尼的存在,简谐力作用下的运动不再是单频的谐振动. 那么按电动力学,它的辐射也不再是单频辐射了. 让我们对上述阻尼振动解作傅里叶展开,即把它展成各种频率的谐振动的叠加,

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \tag{8.7.10}$$

频率为 ω 的振幅 $X(\omega)$ 可由傅里叶反变换求出,

$$X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) e^{i\omega t} dt = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \frac{A_0}{\omega - \omega_0 + \frac{i\gamma}{2}}. \tag{8.7.11}$$

频率在 ω 和 $\omega + d\omega$ 间的辐射功率与 $|X(\omega)|^2$ 成正比,因而

$$\frac{dP}{d\omega} \propto |X(\omega)|^2 \propto \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}, \tag{8.7.12}$$

对于非单频辐射,$\frac{dP}{d\omega}$反映辐射强度随频率的分布,它叫做辐射频谱. 图 8.7 中按(8.7.12)式画出了这谐振子的频谱. 由此看到,辐射频率环绕 γ 有了一个展宽. 在 $\omega = \omega_0 \pm \frac{\gamma}{2}$ 处,辐射强度降低到峰值的一半,因此 γ 称为谱线的宽度. 这频谱的展宽体现了辐射阻

尼的效果.

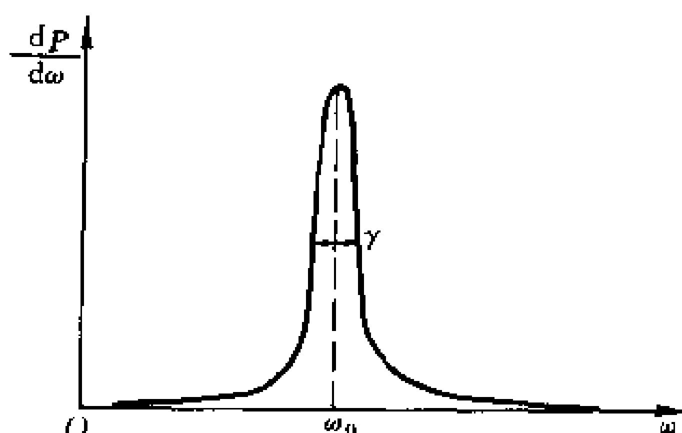


图 8.7 频谱的展宽

单频谱线的上述展宽是由辐射能损而自然产生的，因此被称为谱线的自然展宽. 实际观测到的谱线确实都有一定的频宽，且其宽度常远超过自然宽度 γ. 那是因为实际的辐射源有多种使谱线增宽的原因. 例如当辐射源是由大量振子组成的宏观物体，那么振子热运动引起的多普勒效应也将导致其谱线的展宽. 多普勒展宽 Γ 为

$$\Gamma \sim \sqrt{\frac{kT}{mc^2}}\,\omega_0, \tag{8.7.13}$$

即使源的温度很低，这种展宽仍将远超过其自然宽度.

最后让我们回过来对辐射阻尼力的表达式(8.7.4)作一些讨论.

(1) 这表达式并不仅对周期运动适用. 设电荷的加速和辐射仅发生在一个很短的时间内，例如高速电子打在金属上而很快停了下来. 我们可以把(8.7.3)式中的 t_1 和 t_2 分别取在加速阶段之前和之后，于是该式右边第一项将依然是零. 对这类情形，我们依然可把辐射阻尼力写成(8.7.4)式的形式.

(2) 用辐射阻尼力(8.7.4)式来描述辐射能损是在阶段平均的意义上的. 从瞬时看，$\boldsymbol{F}_r$ 的功率并不等于此时的辐射功率. 因

此这表达式仅是辐射自作用力的近似描写. 进一步讲,即使作为近似描写,(8.7.4)式也不是普遍适用的. 例如在 $\boldsymbol{a}=0$ 的情况下,(8.7.4)式给出 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{r}}=0$. 而只要 $\boldsymbol{a}\neq 0$,辐射及相应的能损却依然存在. 归根到底,带电粒子由产生电磁辐射而引起的自作用问题是一个尚未解决的问题. 长期的研究表明,这问题可能是无法在经典理论的基础上得到解决的.

第9章　介质对电磁波的影响

9.1　自由电子对电磁波的散射

当电磁波在透明介质中定向传播，介质中的电子将在振荡电场的作用下产生强迫振动. 电子的振动会发出次波. 次波是向一切方向放出的，这就是电子对电磁波的散射. 本节讨论介质中的自由电子引起的散射，束缚电子的影响将在下节中讨论.

为简化起见，我们忽略介质中其他粒子对自由电子的作用力. 那么，电子只受到来自电磁波的电力和磁力. 由于电子的热运动速度远小于光速，磁力相对电力是可以忽略的. 这里也不计及辐射阻尼力，因为它对问题没有实质的影响.

按这样的分析，在电磁波作用下的自由电子满足动力学方程

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = e\boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}. \tag{9.1.1}$$

考虑到电子的运动速度远小于光速，它感受到的电磁波相因子的变化主要来自 $e^{-i\omega t}$. 由于电子的运动而引起 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}$ 的变化要小得多，从而可不计及. 这样，动力学方程进一步简化为

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = e\boldsymbol{E}_0 e^{-i\omega t}, \tag{9.1.2}$$

这方程的通解是

$$\boldsymbol{r} = -\frac{e\boldsymbol{E}_0}{m\omega^2}e^{-i\omega t} + \boldsymbol{v}_0 t + \boldsymbol{r}_0. \tag{9.1.3}$$

这解说明，在电磁波的作用下，电子的运动是在匀速运动的基础上叠加一个谐振动. 现在我们感兴趣的是这强迫振动引起的辐射，它就是散射波.

谐振动的电子相当于一个振荡的偶极子，其偶极矩为

$$p = p_0 e^{-i\omega t} = -\frac{e^2 E_0}{m\omega^2} e^{-i\omega t}. \tag{9.1.4}$$

按偶极辐射的公式,它向各方向的辐射功率是

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^4 E_0^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3 m^2} \sin^2\alpha, \tag{9.1.5}$$

其中的 α 代表任一散射方向与电场 $\boldsymbol{E}$ 的夹角. 这结果给出了各方向上的散射波的强度. 这里,它与电磁波的电矢量的方向有关. 我们希望以入射电磁波的传播方向为基准来描写散射波. 为此讨论完全非偏振的入射波.

图 9.1 画出了各方向间的关系. 设入射波沿 z 方向前进,而把我们任取的散射方向放在 x-z 平面上. 这方向用 $\boldsymbol{n}$ 记,它与 z

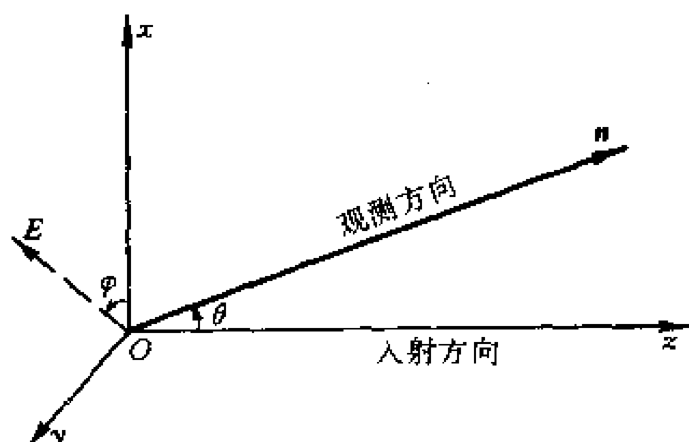


图 9.1 处理散射用的坐标架

轴的夹角为 θ. 入射波的横波性使 $\boldsymbol{E}$ 的方向必在 x-y 平面上. 它与 x 轴的夹角记为 φ. 这样可把任意方向 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 的夹角 α 用 θ 和 φ 来表示.

$$E\cos\alpha = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n} = E_x n_x = E\sin\theta\cos\varphi. \tag{9.1.6}$$

于是,散射波的强度重写作

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^4 E_0^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3 m^2} (1 - \sin^2\theta\cos^2\varphi). \tag{9.1.7}$$

对于完全非偏振的入射波,φ 角的大小是随机的. 因此观测到的是

对 φ 角平均后的结果. 把 $\sin^2\alpha$ 对一切 φ 作平均,有

$$\langle\sin^2\varphi\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1-\sin^2\theta\cos^2\varphi)\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}(1+\cos^2\theta). \tag{9.1.8}$$

这样得到 θ 方向上观测到的散射波强度为

$$\left\langle\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}\right\rangle = \frac{e^4E_0^2}{64\pi^2\varepsilon_0c^3m^2}(1+\cos^2\theta). \tag{9.1.9}$$

这结果表明,各方向上的强度差别不大. 最强方向与最弱方向上散射波的强度仅差一倍.

介质中一个电子产生散射波的总功率为

$$P = \frac{e^4E_0^2}{12\pi\varepsilon_0c^3m^2}. \tag{9.1.10}$$

散射功率与 E_0^2 成正比,反映了它正比于入射波的能流密度 $S_{入}$. 入射能流越强,则散射能流也越强,这是意料之中的. 因此,人们把(9.1.10)写成

$$P = \sigma S_{入}, \tag{9.1.11}$$

其中的比例因子 σ 具有面积的量纲,被称为散射截面. 散射截面的大小反映了自由电子对电磁波的散射能力. 写出入射平面波的能流密度

$$S_{入} = \frac{1}{2}\varepsilon_0E_0^2c. \tag{9.1.12}$$

代入(9.1.11)后,与(9.1.10)对比定出

$$\sigma_{\mathrm{T}} = \frac{e^4}{6\pi\varepsilon_0^2c^4m^2}, \tag{9.1.13}$$

这被称为汤姆孙截面,相应的过程也被叫做汤姆孙散射. 把电子的质量和电荷代入,得到电子的汤姆孙散射截面为

$$\sigma_{\mathrm{T}} = 6.65\times10^{-25}\ \mathrm{cm}^2. \tag{9.1.14}$$

实际测量入射波和散射波的能流,就可由两者之比定出这散射截面. 事实表明上面的理论结果是正确的.

汤姆孙散射有两个物理特征,一是散射波与入射波有同样的

频率，二是散射波的强度与频率无关．这两个性质在可见光的散射中也都得到了实测的证实．在20世纪的20年代，康普顿用实验研究了X射线的散射．他发现散射波的频率相对入射波有变化，这按经典理论是不可思议的事．散射波的频率是由电子的振动频率决定的，而后者又是由入射波的频率决定的．因此，康普顿发现的现象成了光的量子性的重要证据之一．

现在人们知道，频率为ω的光束是由能量为$\hbar\omega$的光子组成的．光的散射是光子与电子的碰撞．在7.6节中我们已从能量和动量守恒的角度讨论过这样的碰撞．考虑到$E=\hbar\omega$，那里已算出出射光和入射光的频率之比，这里把它写作

$$\frac{\omega'}{\omega}=\frac{1}{1+\frac{\hbar\omega}{m_e c^2}(1-\cos\theta)},\tag{9.1.15}$$

对于可见光，$\hbar\omega\ll m_e c^2$，分母中后一项是小量．因此散射光与入射光有同样的频率．对于X射线，它的光子质量$\hbar\omega/c^2$不比m_e小太多．因此散射光子的频率降低在实测中显现了出来．

令散射光子的频率降低为$\Delta\omega=\omega'-\omega$，利用$\frac{\Delta\lambda}{\lambda}=-\frac{\Delta\omega}{\omega}$，易于化出

$$\Delta\lambda=\frac{2\pi\hbar}{m_e c}(1-\cos\theta)=0.024\,36\ \text{Å}\cdot(1-\cos\theta).\tag{9.1.16}$$

我们看到，散射波波长的增加与入射波的波长无关，而只与观测散射的方向有关．这正是康普顿在有这理论之前所发现的现象．X射线的波长是0.1～100 Å的范围．从实测讲，相应的波长变化已可测到．因此康普顿散射实验表明，在X射线的散射中，光的行为更像是一束光子，而电磁波已不是它的好的近似描写了．

这里我们又一次看到了把经典电动力学用于微观粒子时的局限性．理论与实测的对比研究使人们知道，当光子的质量比过程中有关带电粒子的质量小很多，我们可以不管光的量子性，而把它

看成连续的电磁波；经典电动力学也相应能给出与事实相符的结果. 如果两者的质量可比拟，甚或光子已重于带电粒子，那么光的量子性已成了光的主要特征. 用电磁波的概念来描写光束已不合适. 当然经典电动力学也已不能再给出可信的结果了. X 射线光子的能量是 $10^{-4} \sim 10^{-1}$ MeV 的范围，而电子的静能是 0.51 MeV. 光的量子性在可见光散射中不起作用，而在 X 射线散射中显现出来正是例证. 对于康普顿散射，理论处理必须用量子电动力学，而不再能用经典电动力学. 而如果用量子电动力学来计算汤姆孙散射，则所得的结果与我们这里得到的结果是一致的.

9.2 束缚电子对电磁波的散射

这节中讨论原子或离子中的束缚电子对电磁波的散射. 束缚电子绕核转动的周期很短，因此原子(或离子)可看成原子核周围有一团电子云. 在外电磁波的作用下，把核的运动忽略，束缚电子(即电子云)将在核附近往复振动. 让我们按这图象写出束缚电子的动力学方程.

在电子受核的静电力中扣除引起向心加速度的部分，余下的力可写成简谐力 $-m\omega_0^2\boldsymbol{r}$，其中 ω_0 是电子的回旋频率. 这相当于把原子看成振子. 对于光波，其波长是 6000 Å 左右. 它比电子的轨道半径(≈1 Å)大很多. 因此电子在不同位置上感受到的电磁波的相位差不必考虑，即可把原子尺度内的电磁场当作均匀. 此外把辐射阻尼力也考虑在内，电子的动力学方程是

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} + m\omega_0^2\boldsymbol{r} - m\tau\dddot{\boldsymbol{r}} = e\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, \qquad (9.2.1)$$

其中 ω 是电磁波的频率. 这是典型的强迫振动方程. 把阻尼力考虑在内是为了避免强迫振动的振幅可能出现发散.

强迫振动方程的通解是频率为 ω_0 的本征振动和频率为 ω 的强迫振动的叠加. 因为本征振动将被阻尼掉，我们只讨论强迫振动引起的散射. 强迫振动解是

$$r = \frac{e\boldsymbol{E}_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + \omega^2\gamma^2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t+\delta)}, \tag{9.2.2}$$

其中 $\gamma = \tau\omega_0^2 \ll \omega_0$，相差 δ 满足

$$\tan\delta = \frac{\omega\gamma}{\omega^2 - \omega_0^2}, \tag{9.2.3}$$

这里对辐射阻尼力也作了近似处理(参看 8.7 节). 这解表明，在电磁波的作用下，振子具有一个振荡的偶极矩

$$\boldsymbol{p} = \frac{e\boldsymbol{E}_0}{m} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, \tag{9.2.4}$$

它引起的辐射就是我们要考虑的散射波.

前面已多次讨论过偶极辐射的性质. 这里只讨论散射波的频率特性. 仍把辐射功率表示成

$$P = \sigma S_{入}, \tag{9.2.5}$$

其中 $S_{入}$ 是入射波的能流密度. 这里的 σ 是振子对电磁波的散射截面. 与上节一样，代入入射能流的表达式(9.1.12)，就能得出

$$\sigma = \sigma_{\mathrm{T}} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}, \tag{9.2.6}$$

其中 σ_{T} 是自由电子的汤姆孙散射截面. 注意汤姆孙截面与频率无关，(9.2.6)式已显示了振子散射的频率特性. 图 9.2 画出了这

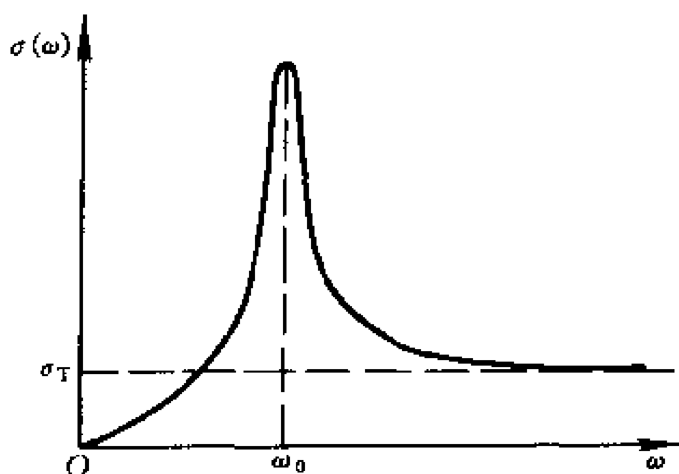


图 9.2 振子的散射截面

函数关系.

让我们先讨论 $\omega \ll \omega_0$ 的低频情形，这时有

$$\sigma = \sigma_T \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4, \tag{9.2.7}$$

它被称作瑞利散射公式. 这公式说，振子对低频电磁波的散射本领与波频的四次方成正比. 瑞利用它解释了天空的颜色为什么是蓝的. 我们知道，太阳的辐射近似地是以黄光(6000 Å 左右)为主的黑体谱. 原子的固有频率比它要高得多. 事情的一方面是太阳辐射的强度随频率增大(相对于黄光)而减弱，另一方面是大气的散射本领随频率的增大而加强. 作为两方面的综合后果，主要的散射光频在 7000 Å 左右(即蓝色). 理论得出的低频散射特性与事实是相符的.

上述频率特性中最令人注意的是 $\omega \approx \omega_0$ 的情形，在 $\omega = \omega_0$ 处散射最强. 当频率加大或减小，波强明显降低. 这被称为共振散射. 观测表明共振散射现象确实是存在的，但是共振频率 ω_0 与经典力学算出的电子回旋频率并不一致. 这里再一次遇到了经典理论不能给出正确结果的问题.

我们现在知道，原子中的电子主要在微观尺度上运动，它是一个典型的量子力学系统. 经典力学和经典电动力学在此是原则上不适用的. 原子的共振散射与原子发光一样，是一个与原子的内部结构有关的问题. 按照量子力学，电子在原子内只能有一系列间断的能级(图 9.3). 当原子在能级 E_1 和 E_2 间跃迁，相应地吸收或放出的光子频率为

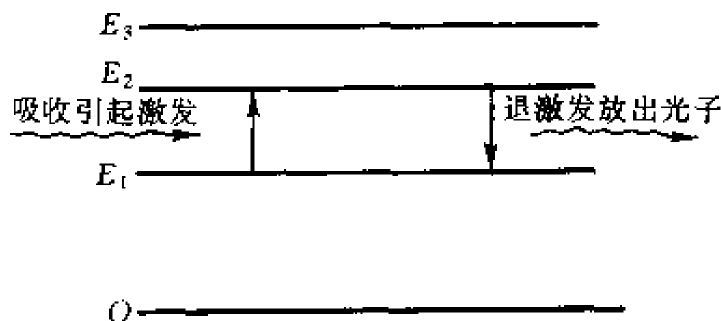


图 9.3 原子吸收与放出光子

$$\hbar\omega = E_2 - E_1. \qquad (9.48)$$

由此看来，共振散射是当电磁波的频率与原子的能级差一致时，原子易于吸收光子而跃迁，然后在退激发时向任意方向放出同频的光子. 这样，经典力学自然不能正确地给出散射的共振频率. 同样由量子力学知道，激发态总是不稳定的，从而有一定的寿命. 按测不准原理，时间的不确定必伴随有能量的不确定性，即其能级必有一定的宽度. 它使得散射频谱具有共振谱的形式. 把这结果与经典理论的结果对比，我们看到，经典理论能正确地给出散射频率特性的定性行为，但不能算出散射的共振频率和频谱宽度.

最后看 $\omega \gg \omega_0$ 的高频情形. 这时光子的能量已远超过了原子的电离能. 因此在入射波的作用下，束缚电子变成了自由电子，当然其散射行为将符合汤姆孙的散射理论. 事实上这理论结果也是与实际相符的. 上节讨论过的康普顿实验是一例. 实验是用石墨等介质做的，当 X 射线照到石墨上，它只用很少一部分能量就把石墨的价电子电离了. 这才使得康普顿散射现象能用光子和自由电子的碰撞来讨论. 高频光与束缚电子的散射跟它与自由电子散射没有区别，其原因是一样的.

9.3 介质对电磁波的吸收和色散

上两节讨论了介质对电磁波的散射. 散射波放出能量，消耗了振子的能量. 振子的振荡能够维持稳定，则是由于入射波的电场作功，向它提供了能量. 这样看来，振子的作用是把入射波能部分地转化成了散射波能，因此入射波本身在传播中将发生变化. 这就是现在要讨论的吸收和色散现象. 它与散射是同一个问题的两个侧面.

我们知道，介质对电磁波传播的影响是通过介电系数 ε 和磁导率 μ 体现的. 忽略磁力的影响，相当于保持 $\mu=\mu_0$. 下面将仍采用经典的振子模型，以导出不导电介质的介电系数 ε，然后用它讨

论介质对电磁波的吸收和色散.

把电磁波作用下的介质可看成由大量振子组成. 为了简单，设振子只有一个固有频率为 ω_0. 若把单位体积内的振子个数记为 N，这样，当振子在振荡电场作用下作强迫振动时，单位体积介质的偶极矩(即极化强度)是

$$\boldsymbol{P} = N\boldsymbol{p} = \frac{Ne}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\omega\gamma}\boldsymbol{E}. \tag{9.3.1}$$

我们看到，极化强度 $\boldsymbol{P}$ 与电场强度 $\boldsymbol{E}$ 成正比. 按 1.6 节，把比例关系记作

$$\boldsymbol{P} = \chi_e\varepsilon_0\boldsymbol{E}_0. \tag{9.3.2}$$

χ_e 是极化系数. 它与介电系数 ε 的关系为

$$\varepsilon = \varepsilon_0(1 + \chi_e), \tag{9.3.3}$$

由此导出这介质的介电系数 ε 是

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{Ne^2}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\omega\gamma}, \tag{9.3.4}$$

它主要取决于振子的固有频率和数密度. 值得注意，这里的介电系数与电磁波的频率有关，而且它是复数. 正是这两点性质造成了介质对电磁波的吸收和色散.

我们重新来考虑 4.4 节中讨论过的问题，即电磁波在介质中的传播. 电磁波的传播方程为

$$\nabla^2\boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0, \tag{9.3.5}$$

把解写成沿 z 方向行进的平面波，

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}, \tag{9.3.6}$$

波矢 k 与频率 ω 的关系是

$$k = \frac{1}{c}n\omega, \tag{9.3.7}$$

其中 $n=\sqrt{\varepsilon/\varepsilon_0}$是介质的折射率，现在它也是复数. 与在 4.5 节中讨论电磁波在导电介质中传播时一样，(9.3.7)式表明 k 或 ω 必有

一个是复数．现在我们感兴趣于稳定传播的波，即令 ω 为实数．这样 k 必定是复数．把它记作 $k=k_0+\mathrm{i}\tau$，所考虑的平面波有形式

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\tau z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0z-\omega t)},\tag{9.3.8}$$

这是波幅有空间衰减的波．虚部 τ 的倒数是波的衰减长度，其实部 k_0 是描述传播的波矢．这些与导体中的波一样．

重要的是讨论 k_0 和 τ 对频率 ω 的依赖关系．把复折射率记成 $n=n_0+\mathrm{i}n_1$，于是(9.3.7)重写作

$$k_0=\frac{1}{c}n_0\omega,\tag{9.3.9}$$

$$\tau=\frac{1}{c}n_1\omega.\tag{9.3.10}$$

因此要点是分析 n_0 和 n_1 对频率的依赖关系．由 $(n_0+\mathrm{i}n_1)^2=\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$，并把(9.3.4)式中的实部和虚部分开，得到

$$n_0^2-n_1^2=1+\frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}\cdot\frac{\omega_0^2-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2},\tag{9.3.11}$$

$$2n_0n_1=\frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}\cdot\frac{\omega\gamma}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2}.\tag{9.3.12}$$

这两个式子决定了 $n_0(\omega)$ 和 $n_1(\omega)$．图 9.4 定性地示出了它们的频率特性．下面用它来讨论介质对电磁波的吸收和色散．

先讨论介质的吸收．电磁波波幅的空间衰减反映了介质对它有吸收．这点与导电介质中的波一样，但物理机制不尽相同．在导体情况下，介质吸收的能量转化成了自由电子的动能．然后电子在与离子的碰撞中又把动能转化成了焦耳热．在不导电介质中，振子吸收的能量则是转化成了振子的辐射能．

现在我们感兴趣于介质对波的吸收强度是与频率有关的．

τ 越大则介质对电磁波的吸收越强．按(9.3.10)式，吸收强度与频率的关系主要通过复折射率的虚部 n_1 反映．我们从图上看到，介质的吸收具有明显的共振特性．当电磁波的频率与振子的固有频率相接近，吸收将很强烈．而当电磁波的频率偏离固有频

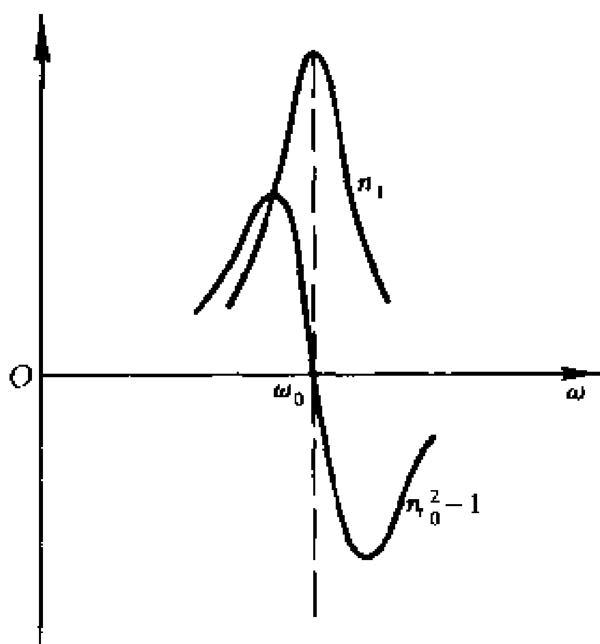


图 9.4 吸收和色散的频率特性

率很远，则介质的吸收很微弱. 这两方面性质在定性上都与实际介质是相符的. 第 4.4 节中讨论电磁波在介质中的传播时没有考虑吸收，而把介电常数当实数. 这相当于假定电磁波的频率与介质的固有频率相差较大.

然后讨论介质对电磁波的色散. 从(9.3.8)式看，波的相速度

$$v=\frac{\omega}{k_0}=\frac{c}{n_0}, \tag{9.3.13}$$

从而它取决于折射率的实部 n_0. 因此 n_0 与频率有关，意味着相速与频率有关. 当波包由不同频率的单色波叠加组成，各单色组分有不同的传播速度，这将使波包发生弥散，这是色散的一种表现. 当波在介质界面折射时，色散有另一种表现. 波的折射角与入射角的关系也取决于折射率的实部 n_0. 它与频率有关，使不同频率的组分向不同方向折射. 这正是我们把太阳光的颜色分开的方法.

人们通常把相速度随频率的增加而减小叫正常色散，而反之则称为反常色散. 从图 9.4 画出的频率特性看，当波的频率远离

介质的固有频率，色散是正常的．而在波频的吸收区，色散是反常的．另一方面，在波频小于固有频率时，$n_0(\omega)>1$，即其相速度小于真空中的光速；反之$n_0(\omega)<1$，其相速是超过光速的．由于波的相速度是波相的运动而并不是能量的运动，所以它并不导致因果律的破坏．

前面已指出，介质对波本身的影响和介质的散射是同一件事的两面，因此对模型的适用性不需重新讨论．

9.4 经典电动力学的适用范围

现在已为人们所周知，牛顿的力学理论和麦克斯韦的电磁理论构成了宏观物理学的两个主要基石．牛顿力学方程是一切有（静）质量物体的动力学规律的基础，而麦克斯韦方程则是研究宏观电磁现象的基础．但是在本课程前面也已陆续谈到，某些电磁现象并不遵循麦克斯韦的理论．因此让我们最后讨论一下这理论的适用范围是很有必要的．

赫兹用电磁波实验证实麦克斯韦理论的预言是在19世纪的后期．正在同一时期，物理研究开始了向微观领域的深入．电子和原子核的发现是一个重要标志．它表明微观粒子不仅是理论概念，而且也是客观实体．对微观现象的实验研究使人们逐渐认识到，微观粒子与宏观物体并不仅是大小的区别，它们的性质和规律都有质的不同．因此，20世纪前确立的物理规律并不是整个物理学基础，而是有局限性的．今天人们把这部分理论称为经典物理．相应地把与微观粒子相关的概念和规律称为量子物理．

如已周知，微观粒子与宏观物体的基本区别在于前者具有波和粒子的两象性．在经典理论中，变化的电磁场用波来描述，而它的粒子性的一面并没有得到反映．同样，微观粒子具有波动性的一面在经典力学中也没有反映．经典理论在某些物理现象上的失效，其根本原因正在这里．

把经典理论用于原子结构模型上的失败是一个重要例子．要使电子与原子核构成束缚系统，按经典理论，电子的运动必有加速度，从而必有辐射．我们已讨论过，这推论与原子的稳定性构成了尖锐的冲突．电子是具有波粒两象性的微观粒子，无疑是造成这矛盾的基本原因．但值得强调，在这问题中、电子的运动尺度与它的德布罗意波长 $\lambda=h/p$ 可比拟．这样，电子的波性成了它的主要性质，才使得它的行为与经典物理规律出现了矛盾．

用一个相反的例子可以说明强调这一点的必要性．当电子在宏观磁场中作圆运动时，实践表明这时它的行为依然是服从经典理论的．经典力学能正确地给出它的轨道半径和向心加速度，经典电动力学能正确给出它的辐射频率和强度．显然，电子作为两象性粒子的本质并没有变．由于这时的运动尺度远大于其德布罗意波长，使得它的波性没有显著的体现．经验告诉人们，在这类情况下，经典理论作为好的近似，它是依然适用的．

按这样的认识，原子或分子的结构问题，以及由于内部结构变化引起的辐射或吸收现象都是量子物理问题．经典理论在这类问题中是不适用的．本章前几节中指出，介质在外电磁波作用下的共振频率不能由经典理论算出，其原因就在这儿．原子的辐射频率不能由经典理论得出，也是同样的原因．

电动力学作为电磁作用的动力学，它涉及带电粒子和电磁场两方面．当带电粒子的波动性成主要性质时经典理论将失效，这是问题的一方面．当电磁场的粒子性起主要作用时，经典理论也将失效．这是问题的另一方面．

按量子理论，频率为 ν 的电磁波也可看成光子流，其中每一光子具有能量 $E=h\nu$．在讨论光的散射时已指出过，散射过程本质上是光子与带电粒子的碰撞．当光子的质量 $h\nu/c^2$ 与带电粒子相比可忽略时，光的粒子性是次要的，经典电动力学是好的近似．当波的频率很高，以致光子的质量不可忽略，则经典电动力学将失效．这是电磁作用中光的粒子性的一种表现．

光的粒子性的另一种表现形式可以用光电效应为例来说明.在光电效应中,电磁作用表现为电子对光子的吸收.按量子理论,微观粒子对光的吸收是一种概率现象.当光照射在金属表面上时,表面附近的每个电子都有一定概率以吸收到一个光子,从而获得能量 $h\nu$.一个电子要吸收到几个光子,即获得几倍 $h\nu$ 的能量的概率很小.因此要使电子获得足够的能量以克服表面势垒的束缚,入射光须有足够高的频率,而不是足够大的强度.增大光的强度是增加单位时间入射的光子数,它的效果是增加可能吸收到光子的电子数,而不是增大单个电子的能量.光电效应的实验完全证实了这些特征.这说明由经典理论无法解释它是光在这过程中呈现出显著的量子性的结果.

上面我们从几个方面分析了使经典电磁理论失效的因素.目的是说明,光的粒子性和带电粒子的波动性都不显著的电磁过程才是经典电动力学所适用的过程.

附录 1　三维矢量和张量分析的常用公式

在电动力学中涉及许多矢量和张量运算．这里把我们常用而一般数学书中不常见的公式罗列一下．

1．矢量的复合微分运算式

$$\nabla(\varphi\psi) = \varphi\nabla\varphi + \psi\nabla\varphi, \tag{A1.1}$$

$$\nabla\cdot(\varphi \boldsymbol{A}) = \varphi\nabla\cdot\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\cdot\nabla\varphi, \tag{A1.2}$$

$$\nabla\times(\varphi \boldsymbol{A}) = \varphi\nabla\times\boldsymbol{A} + \nabla\varphi\times\boldsymbol{A}, \tag{A1.3}$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}\cdot\nabla\times\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\cdot\nabla\times\boldsymbol{B}, \tag{A1.4}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A}, \tag{A1.5}$$

$$(\nabla\times\boldsymbol{A})\times\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\cdot\nabla\boldsymbol{A} - \frac{1}{2}\nabla A^2, \tag{A1.6}$$

$$\begin{aligned}\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = {} & \boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B}) + (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} \\ & - \boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B},\end{aligned} \tag{A1.7}$$

$$\begin{aligned}\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = {} & (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} \\ & + \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}).\end{aligned} \tag{A1.8}$$

$$\nabla r = \frac{\boldsymbol{r}}{r} = \boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}), \tag{A1.9}$$

$$\nabla f(r) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}), \tag{A1.10}$$

$$\nabla^2\frac{1}{r} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}). \tag{A1.11}$$

注意到算符的矢量性，并利用对乘积微商的分配律(即莱布尼兹法则)，前 7 个公式很容易直接证明．(A1.8)的证明须利用到矢量的双叉乘公式．(A1.8)式的形式较复杂，但并不难用分量形式证明．(A1.9)和(A1.10)两式涉及对距离 r 的微商运算．注意到 r

$=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$，利用复合函数的微商规则易于直接得到.(A1.11)式实际上就是点电荷的库仑定律的微分方程形式. 建议读者把这些公式作为练习来证明. 证明的目的是理解它成立的原因，以便能直觉地运用它. 这样在电动力学的学习中才能区分什么是物理考虑，而什么仅是必然的数学结果.

2. 并矢与高阶张量

在 6.4 节中已讨论过，三维张量是借助笛卡儿坐标架的转动矩阵 $\boldsymbol{R}$ 来定义的. 矢量 T_i 即一阶张量，它在坐标架转动时须满足的变换关系是

$$\bar{T}_m = R_{mi}T_i. \tag{A1.11}$$

二阶张量 T_{ij} 须满足的变换关系是

$$\bar{T}_{mn} = R_{mi}R_{nj}T_{ij}. \tag{A1.12}$$

由两个矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 构成的并矢记作 $\boldsymbol{AB}$. 它有 9 个分量，即 A_iB_j. 由于 A_i 和 B_j 分别满足变换

$$\bar{A}_m = R_{mi}A_i, \tag{A1.13}$$

$$\bar{B}_n = R_{nj}B_j, \tag{A1.14}$$

因此并矢 $\boldsymbol{AB}$ 的变换满足(A1.12). 这说明并矢是二阶张量的一种形式. 显然三个张量的并矢必会具有三阶张量的变换关系，并以此类推.

并矢与矢量的点乘运算分右点乘和左点乘，它们分别定义为

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{BC} = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}, \tag{A1.15}$$

$$\boldsymbol{BC}\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A}). \tag{A1.16}$$

点乘后的积是矢量. 按这定义，矢量间的两次叉乘可用并矢表示成

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{CB}-\boldsymbol{BC}). \tag{A1.17}$$

两个二阶张量 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}$ 和 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{B}}$ 之间的双点乘运算定义为

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}:\overleftrightarrow{\boldsymbol{B}} = A_{ij}B_{ji}, \tag{A1.18}$$

双点乘后的积是标量，它就是两者的矩阵乘积的迹. 单位(二阶)张量的分量是 $I_{ij}=\delta_{ij}$. 因此相应地有

$$\overleftrightarrow{I} : \overleftrightarrow{T} = T_{ii} = \mathrm{tr}\overleftrightarrow{T}, \tag{A1.19}$$

$$\overleftrightarrow{I} : \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}, \tag{A1.20}$$

$$(\boldsymbol{AB}) : (\boldsymbol{CD}) = (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D}). \tag{A1.21}$$

当涉及并矢或二阶张量的微分，运算按同样规则操作. 需要注意的是微分运算对哪个或哪些张量进行. 在本书中，我们用括号标记它. 当微分算符后没有括号，则表示微分运算仅对紧挨着的张量进行. 我们用到过如下的公式

$$\overleftrightarrow{I} : \nabla\nabla = \nabla^2, \tag{A1.22}$$

$$\nabla\boldsymbol{r} = \overleftrightarrow{I}, \tag{A1.23}$$

$$\nabla\cdot(\varphi\overleftrightarrow{I}) = \nabla\varphi, \tag{A1.24}$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{AB}) = \boldsymbol{A}\cdot\nabla\boldsymbol{B} + (\nabla\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}, \tag{A1.25}$$

$$\boldsymbol{A}\cdot\nabla\boldsymbol{r} = \boldsymbol{A}, \tag{A1.26}$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}r^2) = r^2\,\nabla\cdot\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{A}. \tag{A1.27}$$

利用这些运算关系，易于推出我们曾用到过的两个公式

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{Ar}) = (\nabla\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{r} + \boldsymbol{A}, \tag{A1.28}$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{Arr}) = (\nabla\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{rr} + \boldsymbol{Ar} + \boldsymbol{rA}. \tag{A1.29}$$

3. 场量的泰勒展开式

在对场量 $f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$在 $\boldsymbol{r}_0=0$ 附近作泰勒展开时，采用并矢的点乘可写成

$$f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) = f(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{r}_0\cdot\nabla f(\boldsymbol{r}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{r}_0 : \nabla\nabla f(\boldsymbol{r}) + \cdots, \tag{A1.30}$$

这仅是符号的简化. 其含义与通常的展开没有区别. 我们一再用到的是对 $1/|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|$的展开. 当保留前三项，它的形式是

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}=\frac{1}{r}+\frac{\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}+\frac{\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{r}_0:(3\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}-r^2\overleftrightarrow{I})}{2r^5}+\cdots$$

$$=\frac{1}{r}+\frac{\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{e}_r}{r^2}+\frac{\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{r}_0:(3\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_r-\overleftrightarrow{I})}{2r^3}+\cdots,$$

(A1.31)

注意到

$$\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_r:\overleftrightarrow{I}=\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{e}_r=1, \qquad \text{(A1.32)}$$

因而有

$$\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{r}_0:\overleftrightarrow{I}=r_0^2=r_0^2\overleftrightarrow{I}:\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_r, \qquad \text{(A1.33)}$$

利用这关系,上述展开式可改写成

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}=\frac{1}{r}+\frac{\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{e}_r}{r^2}+\frac{(3\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{r}_0-r_0^2\overleftrightarrow{I}):\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_r}{2r^3}+\cdots,$$

(A1.33)

采用这形式或(A1.31)的形式取决于问题的需要. 两者在数学上是等价的.

附录 2　国际单位制与高斯单位制

在国际单位制中，电磁量的单位是以电工学的习惯单位为基础来规定的. 这样的做法给电动力学理论无谓地带来了系数上和量纲上的复杂性. 因此对电磁学理论，它不是一个好的单位制. 在作理论研究或写理论教科书时，很少有人采用它. 在我国，由于有行政法规的限制，本书采用了国际单位制. 为便于读者阅读国际上的其他参考书或文献，我们在本附录中把较经常被采用的高斯单位制与国际单位制放在一起，作一个讨论和比较.

1. 两种单位制的差别

电磁量在国际单位制（简记为 I. U.）与高斯单位制（简记为 G. U.）中的差别首先源于静电和静磁规律中的比例系数. 为便于对照，表 A2.1 用两种单位制列出了真空中的基本电磁规律.

我们先讨论 G. U. 下的静电和静磁规律. 在 G. U. 中，电量的单位没有事先的规定. 因此，它可以把库仑定律中的比例系数规定为 1，并由此来确定电量的单位. 这样定义的单位叫静库. 相应地，电流密度在 G. U. 中的单位是静库/(秒·厘米^2). 由于电流密度的单位已确定，静磁规律中的比例系数应通过测量电流间的作用力来定出. 现在把这系数写为 $1/c$ 因为能证明它正是光速的倒数. 实测得到光速的大小为 2.9979×10^{10} cm/s.

在 I. U. 中，电工学的习用电流单位安培被规定为基本单位. 于是相应的电量单位是安[培]·秒，被叫做库[仑]. 它与静库的关系是

$$1\ 库[仑] = 3\times10^9\ 静库. \tag{A2.1}$$

由于电量单位已事先确定了，库仑定律中的比例系数应通过测量

表 A2.1　用两种单位制列出的真空中的基本电磁规律

	国际单位制	高斯单位制
静电规律	$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\boldsymbol{e}_r$	$\boldsymbol{E}=\frac{Q}{r^2}\boldsymbol{e}_r$
静磁规律	$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{\lvert\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\rvert^2}\mathrm{d}\tau'$ $=\frac{1}{c^2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{\lvert\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\rvert^2}\mathrm{d}\tau'$	$\boldsymbol{B}=\frac{1}{c}\iiint\frac{\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{\lvert\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\rvert^2}\mathrm{d}\tau'$
洛伦兹力密度	$\boldsymbol{f}=\rho\boldsymbol{E}+\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{f}=\rho\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}$
真空中的麦克斯韦方程	$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon_0\\ \nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\\ \nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\end{cases}$ $=\frac{1}{c^2}\frac{\boldsymbol{j}}{\varepsilon_0}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$	$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{E}=4\pi\rho\\ \nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\\ \nabla\times\boldsymbol{B}=4\pi\boldsymbol{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\end{cases}$

电量为已知的电荷间的作用力来确定. 实测定出它的值是 8.988×10^9 I. U. 基于简化电磁方程的动机，这系数写成了$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$. 在表达静磁规律时，事情是类似的. I. U. 中的电流密度单位是库/(秒・米^2)(C/s・m^2). 实测定出毕奥-萨伐尔定律中的比例系数值为 1×10^{-7}I. U.. 基于同样的动机，这系数被写成$\frac{\mu_0}{4\pi}$. 总之，由于在 I. U. 中事先规定了安培为电流的单位，静电和静磁规律中出现了两个系数 ε_0 和 μ_0. 这两个系数没有更多的物理内涵.

在 I. U. 中能证明，真空中的光速是 $c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$. 这样使电磁学中出现了三个常数，但其中只有两个是独立的. 在下面的分析中，我们将取 c 和 ε_0 为独立的系数，把 μ_0 看作由它们所决定的量. 因此表 A2.1 中也把静磁规律的系数记作$\frac{1}{c^2}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$.

单位取法的不同，导致了电磁量间量纲关系的不同. 首先注意，电流密度与电荷密度间的量纲关系对两种单位制都是

$$[j]=[\rho][c]. \tag{A2.2}$$

本附录中，我们将一直用方括号表示该量的量纲. 把静磁规律与静电规律作量纲对比看出，在 G.U. 中 E 与 B 有相同的量纲，而在 I.U. 中 E 与 B 的量纲关系为

$$[E]=[B][c]. \tag{A2.3}$$

这是这两种单位制的一个重要差别. 表 A2.1 中也列出了洛伦兹力密度和真空中的麦克斯韦方程. 那里的差别完全是上面分析过的基本差别的后果，特别是多处出现了因子 c 的差别. 它可以这样理解：G.U. 公式中出现的 c 是为了保证 E 与 B 有相同的量纲，而 I.U. 中出现的 c 是保证 E 与 B 有不同的量纲.

上面讨论的是真空中的电磁规律. 在含介质的电磁问题中，D 与 H 是导出量，它们的定义又有一定的任意性. 这样又扩大了两种单位制的差别. 表 A2.2 列出了有关公式的对照.

表 A2.2　两种单位制中有关公式的对照表

	国际单位制(I.U.)	高斯单位制(G.U.)
$\boldsymbol{D}$ 的定义	$\boldsymbol{D}=\epsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{E}+4\pi\boldsymbol{P}$
$\boldsymbol{H}$ 的定义	$\mu_0\boldsymbol{H}=\boldsymbol{B}-\mu_0\boldsymbol{M}$	$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{B}-4\pi\boldsymbol{M}$
均匀介质中的 $\boldsymbol{D}$	$\boldsymbol{D}=\epsilon\boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{D}=\epsilon\boldsymbol{E}$
均匀介质中的 $\boldsymbol{H}$	$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$	$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$
介质中的麦克斯韦方程	$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho\\ \nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\\ \nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\end{cases}$	$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{D}=4\pi\rho\\ \nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\\ \nabla\times\boldsymbol{H}=\dfrac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}+\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\end{cases}$

仍先分析高斯单位制中的定义. 在 G.U. 中由库仑定律和偶极矩密度 $\boldsymbol{P}$ 的定义看出，E 和 P 有同样的量纲(参看本附录下面的分析)，并且 B 与磁矩密度 M 有同样的量纲. 把 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 定义成

如表 A2.2 所列那样是电磁规律造成的自然后果. 这样的定义使 E,D,P,B,H 和 M 都有相同的量纲. 这是 G.U. 的一个很大的好处.

在 I.U. 中,由同样的对比看到,$\varepsilon_0 E$ 与 P 有相同的量纲. 电磁规律决定,$\boldsymbol{D}$ 必须是它们的组合. 但是它可以定义成与 E 有相同的量纲,也可以定义成与 P 有相同的量纲. I.U. 实际上采用如表 A2.2 所列的定义是为了在有介质时的麦克斯韦方程中不留下 ε_0. 在 $\boldsymbol{H}$ 的定义中问题完全类似. 已有的公式已决定 B/μ_0 与磁矩密度 M 有相同的量纲. I.U. 中对 $\boldsymbol{H}$ 采用了表 A2.2 中的定义. 这既是电磁规律的要求,也是为使有介质时的麦克斯韦方程中不留下 μ_0 的要求. 而这样做的代价是使 E 和 D 及 H 和 B 有了不同的量纲,从而把 I.U. 中场量间的量纲差别扩大了. 这一后果在下面还将会讨论到.

从表 A2.2 中看到,均匀介质中的关系 $D=\varepsilon E$ 和 $B=\mu H$ 对两种单位制都适用. 但让我们注意一点差别. 在 G.U. 中,ε 和 μ 都无量纲;而在 I.U. 中,ε 有 ε_0 的量纲,而 μ 有 μ_0 的量纲. 因此它们在两种单位制中的数值并不一样. 当介质影响可不计时,按 I.U.,ε 和 μ 应回到 ε_0 和 μ_0;而按 G.U.,ε 和 μ 都将回到 1. 此外表 A2.2 中也列入了介质中的麦克斯韦方程在两种单位制下的形式,它们中的差别是前面已讨论过的差别的反映.

在静电问题中已没有别的导致差别的因素,而在与磁有关的问题中还有磁矩定义上的差别. 看电流圈的磁矩. 在 I.U. 中,它被定义为

$$\boldsymbol{m} = I\boldsymbol{S}, \qquad \text{(A2.4)}$$

而在 G.U. 中被定义为

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{c} I\boldsymbol{S}. \qquad \text{(A2.5)}$$

此外在电磁辐射问题中还引入了标势 φ 和矢势 A. 作为前面讨论到的差别的后果,它们在两种单位制下也体现出有差别. 表

A2.3对比地列出了相应的定义和规律.

表 A2.3 两种单位制中 A,φ的定义和规律

	国际单位制	高斯单位制
A 的定义	$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$
φ的定义	$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}$	$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}$
洛伦兹规范条件	$\nabla\cdot A+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$	$\nabla\cdot A+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$
A 的方程	$\nabla^2\boldsymbol{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\boldsymbol{j}$	$\nabla^2\boldsymbol{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=-\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}$
φ的方程	$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\rho/\varepsilon_0$	$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=-4\pi\rho$

这里值得注意的是在 G.U.中 φ 和 A 有相同的量纲,而在 I.U.中两者的量纲关系为

$$[\varphi]=[A][c]. \tag{A2.6}$$

洛伦兹规范条件的差别是两种单位制下 φ 与 A 的量纲关系不同造成的.

2. 电磁量的相对量纲

在 G.U.中只有三个基本量纲,即长度$[L]$,质量$[M]$和时间$[t]$.在 I.U.中还多出一个基本量纲,即电流$[I]$.在这两种单位制中,各个电磁量的量纲都较复杂而难以记忆.这使得使用量纲变得很困难.

实用上,在推导较复杂的公式时,用量纲作核对常是很有帮助的.这时所需要的其实不是把每个量都还原到基本量纲.真正有用的是有关量之间的相对量纲.我们对它作一个简单分析.

上面已提到,G.U.中各电磁量的相对量纲很简单.由库仑定律知,电场强度 E 与电量 Q 的相对量纲为

$$[E]=\frac{[Q]}{[L]^2}, \tag{A2.7}$$

从偶极矩密度 P 的定义看出它的相对量纲为

$$[P]=\frac{[Q][L]}{[L]^3}=\frac{[Q]}{[L]^2}, \tag{A2.8}$$

类似地用这样的分析可看清,G.U. 中各常用电磁量的相对量纲为

$$[E]=[B]=[D]=[H]=[P]=[M]=[Q]/[L]^2. \tag{A2.9}$$

这简单关系在对电磁公式作量纲分析时是十分方便和有用的.

上面已讨论到,在 I.U. 中的场量间的相对量纲是不一致的. 我们把它们归结为如下两组:

$$[\epsilon_0 E]=[D]=[P]=\frac{[Q]}{[L]^2}, \tag{A2.10}$$

$$\left[\frac{B}{\mu_0}\right]=[H]=[M]=\frac{[Q][c]}{[L]^2}. \tag{A2.11}$$

此外还须记住,E 与 B 差一个速度的量纲(即(A2.2)). 这些关系的记忆要困难一些. 但当使用 I.U. 时,它们对核对等式(例如麦克斯韦方程式)两边的量纲时依然是有帮助的.

值得重复提到 E 与 B 的相对量纲问题. 我们在狭义相对论中已看到,电场和磁场是同一种场的不同表现,而不是两种不同的场. 因此在人为地规定单位制时,让 E 与 B 有相同的量纲是自然的;让它们有不同量纲是许可的,但是不自然的. 不自然的做法会带来不方便的后果. 表 A2.4 列出了真空中的电磁波的波幅关系,及其能量密度和能流密度公式.

表 A2.4　两种单位制中 E,ω,S 的公式

	国际单位制	高斯单位制
电波和磁波	$E=cB$	$E=B$
能量密度	$w=\frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2+\frac{B^2}{\mu_0}\right)$	$w=\frac{1}{8\pi}(E^2+B^2)$
能流密度	$\boldsymbol{S}=\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{S}=\frac{c}{4\pi}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$

从 G.U. 下的能量密度公式看,E 与 B 对能量的贡献是平等

的. 结合电波和磁波关系看出, 变化电磁场中电场和磁场携带着同样多的能量. 这是一个很重要的物理概念. 当从 I. U. 下的能量密度公式看, 电场与磁场的平等性体现不出来. 把电波和磁波关系 $E=cB$ 代入, 我们依然看出了电波与磁波有相同的能量. 显然, 事情的物理本质是不会与单位制有关的. 问题在于这时须从表观的不平等中体会其实质上的平等. 所以说, 使 E 与 B 有不同量纲是国际单位制的一个明显的缺点.

3. 两种单位制下公式的替换

既然国际单位制与高斯单位制在电磁学上的差别是由有限几个不同选择造成的, 我们原则上总能找到有限几个基本替换, 使两种单位制下的电磁公式能够转换. 例如两种单位制下库仑定律的原始形式为

$$\text{I. U.} \qquad F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{r^2}, \qquad \text{(A2.12)}$$

$$\text{G. U.} \qquad F = \frac{Q^2}{r^2}. \qquad \text{(A2.13)}$$

对比看出, 若保持非电磁量不变, 把 I. U. 下的 $\dfrac{Q}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}}$ 换成 Q, 则可从 I. U. 下的公式得到在 G. U. 下的公式. 表 A2.5 列出了一些基本的替换关系, 以及它所根据的对比公式.

从表 A2.5 看, 我们只须记得两种单位制下几个基本公式的对应, 就可以容易地写出基本电磁量的替换关系. 有了这种关系, 就能从国际单位制下的电磁公式找到它在高斯单位制下的对应式, 或达到反过来的目的. 下面举几个例子.

例 1 按 I. U., 能流密度公式为 $\boldsymbol{S}=\dfrac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$, 求 G. U. 下相应的公式.

按表 A2.5, 这时只须把 I. U. 下的公式中的 E 换成 $\dfrac{E}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}}$, B

A2.5 两种单位制的替换关系及对比根据

电磁量	国际单位制⟷高斯单位制	对比根据
电荷	$\frac{Q}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}} \longleftrightarrow Q$	$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{r^2}$ 与 $F=\frac{Q^2}{r^2}$
电场强度	$\sqrt{4\pi\varepsilon_0}E \longleftrightarrow E$	$E=\frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{Q}{r^2}$ 与 $E=\frac{Q}{r^2}$
磁感应强度	$\sqrt{4\pi\varepsilon_0}cB \longleftrightarrow B$	$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$ 与 $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$
电位移强度	$\sqrt{\frac{4\pi}{\varepsilon_0}}D \longleftrightarrow D$	$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$ 与 $\nabla\cdot\boldsymbol{D}=4\pi\rho$
磁场强度	$\frac{1}{c}\sqrt{\frac{4\pi}{\varepsilon_0}}H \longleftrightarrow H$	$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}$ 与 $\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}$
磁矩	$\frac{m}{c\sqrt{4\pi\varepsilon_0}} \longleftrightarrow m$	$\boldsymbol{m}=I\boldsymbol{S}$ 与 $\boldsymbol{m}=\frac{1}{c}I\boldsymbol{S}$

换成$\frac{B}{c\sqrt{4\pi\varepsilon_0}}$($\mu_0$ 不动，但注意 $\varepsilon_0\mu_0=\frac{1}{c^2}$)，立即得到

$$S=\frac{1}{\mu_0 c}\cdot\frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{4\pi\varepsilon_0}=\frac{c}{4\pi}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}, \tag{A2.13}$$

它就是 G.U. 下的能流密度公式.

例 2 按 G.U.，电磁能量密度公式为 $w=\frac{1}{8\pi}(E^2+B^2)$，求 I.U. 下相应的公式.

这问题只须把表 A2.5 从 G.U. 到 I.U. 的替换关系代人，同样注意到 $c^2=\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}$，立即得到 G.U. 下的电磁能密度公式

$$w=\frac{1}{8\pi}(4\pi\varepsilon_0E^2+4\pi\varepsilon_0c^2B^2)=\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0E^2+\frac{B^2}{\mu_0}\right). \tag{A2.14}$$

例 3 本书中已导出电偶极辐射的功率为 $P=\frac{\mu_0\omega^4p_0^2}{12\pi c}$ 和磁偶

极辐射功率为 $P=\frac{\mu_0\omega^4 m_0^2}{12\pi c^3}$，试导出 G.U. 下的相应结果.

因为电偶极矩是电荷乘距离，而后者是非电磁量，所以偶极矩 p 与电荷 Q 同样地替换，即 p_0 换成 $\sqrt{4\pi\varepsilon_0}p_0$. 这样得到 G.U. 下的偶极辐射功率为

$$P=\frac{\omega^4 p_0^2}{3c^3},\tag{A2.15}$$

对磁偶极辐射，磁矩 m_0 应换成 $m_0 c\sqrt{4\pi\varepsilon_0}$，相应得到 G.U. 下的功率公式为

$$P=\frac{\omega^4 m_0^2}{3c^3},\tag{A2.16}$$

在 G.U. 下电与磁是对称的，这是 G.U. 的好处.

例 4 本书讨论四极辐射时曾导出磁辐射波为

$$\boldsymbol{B}_{e4}=-\frac{\mathrm{i}\mu_0\omega^3}{24\pi c^2}\boldsymbol{e}_r\times(\boldsymbol{e}_r\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{D}}_0)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}}{r},\tag{A2.17}$$

试写出 G.U. 下的磁辐射波.

这时须对等式左边的 B 与等式右边的四极矩 D 同时作替换. 四极矩与电荷的替换规则相同. 替换后得到 G.U. 下的公式为

$$\boldsymbol{B}_{e4}=-\frac{\mathrm{i}\omega^3}{6c^3}\boldsymbol{e}_r\times(\boldsymbol{e}_r\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{D}}_0)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}}{r}.\tag{A2.18}$$

附录 3 有关的物理常数

真空中光速	$c=2.9979\times10^{8}$ m/s
真空介电常数	$\varepsilon_0=8.8542\times10^{-12}$ F/m
真空磁导率	$\mu_0=1.2566\times10^{-7}$ H/m
电子电荷	$e=1.6022\times10^{-19}$ C $=4.8065\times10^{-10}$ 静库
电子质量	$m_e=9.1094\times10^{-31}$ kg $=0.5110$ MeV/c^2
质子质量	$m_p=1.6726\times10^{-27}$ kg $=938.27$ MeV/c^2
中子质量	$m_n=1.6750\times10^{-27}$ kg $=939.56$ MeV/c^2
氘核质量	$m_D=3.3437\times10^{-27}$ kg $=1875.58$ MeV/c^2
氘的结合能	$E_D=2.23$ MeV
氢原子玻尔半径	$a_0=\dfrac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}=0.52918\times10^{-10}$ m
氢原子结合能	$E_H=13.6$ eV
普朗克常量	$h=6.6261\times10^{-34}$ J·s
	$\hbar=h/2\pi=1.0546\times10^{-34}$ J·s
电子伏[特]	1 eV $=1.6022\times10^{-19}$ J

附录4 习题选编

第1章 经典电动力学基础

1. 试证明附录1中的复合微分运算公式:(A1.2)(A1.4)(A1.6)(A1.7)(A1.9)(A1.10).
2. 试证明张量的微分运算式:(A1.23)(A1.24)(A1.25)(A1.26)(A1.28)(A1.32).
3. 用介质中的麦克斯韦方程导出相应的能量守恒定理.
4. 有平面波 $\boldsymbol{E}=E_0\cos(kx-\omega t)\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{B}=\dfrac{E_0}{c}\cos(kx-\omega t)\boldsymbol{e}_y$,

   (a) 算出它的动量密度的周期平均值;

   (b) 若这平面波垂直投射于一平板上,并全部被吸收,求出平板所受的压强;

   (c) 若全部被反射,求出平板所受的压强.
5. 有限区域内的介质被极化和磁化,试证明:

   (a) 介质表面的等效面束缚电荷密度为 $\Sigma_p=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}$,其中 $\boldsymbol{P}$ 是极化强度,$\boldsymbol{n}$ 是外向的单位法向量;

   (b) 介质表面的等效面诱导电流密度为 $\boldsymbol{K}_m=-\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{n}$,其中 $\boldsymbol{M}$ 是磁化强度.
6. 证明均匀介质内部的束缚电荷密度 $\rho_p=-\left(1-\dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\rho$,其中 ρ 为自由电荷密度.
7. 有两种绝缘介质,界面上没有面自由电荷,证明电力线的曲折满足

$$\frac{\tan\theta_2}{\tan\theta_1}=\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1},$$

其中 θ 为电力线与界面法线的夹角.

8. 有中心为 O,半径为 R 的均匀带电球,电荷密度为 ρ,在 O' 处挖去一半径为 $R/2$ 的空洞,$OO'=R/2$,试算出空洞内的电场强度.(提示:用叠加原理)
9. 平行板电容器内有两层介质,厚度分别为 l_1 和 l_2,介电系数为 ε_1 和 ε_2,加在两板上的电动势为 $\mathscr{E}$,
   (a) 求出电容器两极上的自由电荷面密度;
   (b) 若介质漏电,电导率分别为 σ_1 和 σ_2,试在电流达到稳恒时两极上及介质间的自由电荷面密度.

第 2 章 静电问题

1. 由 $\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_r}{r^2}$,通过梯度运算导出偶极子的电场强度公式.
2. 在原点有一个 $\boldsymbol{p}=p\boldsymbol{e}_z$ 的偶极子,另在 $x=0,y=0,z=l$ 处有一个矩为 $-\boldsymbol{p}$ 的偶极子.算出它们在 $r\gg l$ 处产生的电势.
3. 对如下两个电荷系统:(a) 点电荷 $-2q$ 位于坐标原点,另一个点电荷 $+q$ 位于 $x=l_1,y=z=0$ 处,第三个点电荷 $+q$ 位于 $y=l_2,x=z=0$ 处;(b) 前两个电荷不变,第三个点电荷放在 $x=l_1,y=l_2,z=0$ 处;试算出它们的总电量,电偶极矩及电四极矩.并算出它们在远处的电势的领头项.问其电场强度与 r 的几次方成反比.
4. 有一均匀带电的旋转椭球,总电量为 Q,其边界为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$.试证明其四极矩张量的非对角分量为零,并算出其对角分量.
5. 在 $x=0$ 处和 $y=0$ 处有两个互相垂直的无限导体面.设有一点电荷从无穷远处准静态地移至 $x=a,y=b,z=0$ 处.试求电荷在这位置上所受的电场力及移动中外力所做的功.
6. $z=0$ 处有一无限平面导体,它在 $x=0,y=0,z=0$ 处有一向上的半球面凸起,半径为 R.另在 $x=y=0,z=l>R$ 处有一点电

荷 q. 试求出上半无限空间内的电势分布.

7. 有一半径为 R 的导体薄球壳,带电量 Q. 壳内距中心 a 处有一点电荷 q. 求壳上的电荷分布.

8. 在以 O 为心,R 为半径的球面上,已知电势分布为 $\varphi(r=R,\theta)=\varphi_0(1+\cos\theta)^2$,其中 θ 为球坐标极角. 试用特解叠加法求出球面外的电势分布.

第3章　静磁问题

1. 设 $x<0$ 的半空间有磁导率为 μ 的均匀介质,$x>0$ 的半空间为真空. 有一无限长的线电流 I 沿 z 轴流动. 求磁感应强度和磁化电流的分布.

2. 有一均匀,无限长直的圆柱形螺线管,单位长度有线圈 n 匝,电流强度为 I. 试用唯一性定理求管内外的磁感应强度.

3. 物质密度和电荷密度都均匀的刚性小球以角速度 ω 转动,小球的半径为 R,总质量为 M,总电量为 Q. 求它的磁矩和回磁比(即角动量和磁矩之比).

4. 设理想铁磁体的磁化规律为 $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}+\mu_0\boldsymbol{M}_0$,其中 $\boldsymbol{M}_0$ 是与 $\boldsymbol{H}$ 无关的常矢量. 求用这种材料做成的半径为 R 的铁球内外的磁感应强度和球内的磁化电流分布.

5. 将一磁导率为 μ,半径为 a 的球体置于均匀外磁场 $\boldsymbol{H}_0$ 中,求球内外的磁场强度 H,球内的磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 和球体的总磁矩 $\boldsymbol{m}$.

6. 设 $z<0$ 处有磁导率很大的介质,$z=a>0$ 处有一块磁矩为 $\boldsymbol{m}$ 的小永磁体,它的磁矩方向与界面法向的夹角为 θ. 求这小永磁体所受到的力.

第4章　电磁波的传播

1. 有一沿 z 方向传播的平面电磁波. 其电矢量在 x,y 平面上沿 y

$=x$ 作直线振动. 试写出这波的解析式,并把它分解为圆偏振波的叠加.

2. 在光从光密介质向光疏介质入射的情况下,(a) 写出入射、反射和折射波的能流密度;(b) 能量的守恒性要求这三个能流满足什么关系? (c) 讨论全反射情况下的能量守恒.
3. 平面波从真空斜向地射入良导体(表面为平面). 试求出透射波的传播波矢 k_0 和衰减长度 $1/\tau$.
4. 论证矩形波导管内不能存在 TM_{m0} 和 TM_{0n} 型波.
5. 无限长的 z 向矩形波导管,在 $z=0$ 处被一垂直的理想导体板所封闭. 求在 $z=-\infty$ 至 $z=0$ 间的管内能存在的波型.

第 5 章 电磁波的激发

1. 通有稳定电流 I 的圆线圈,半径为 a. 当它绕其直径以角速度 ω 匀速转动,求它的辐射场.
2. 在半径为 a 的圆形线圈上通有电流 $I=I_0 e^{-i\omega t}$. 已知 $ka\ll 1$,求辐射场的分布,总辐射功率及它的方向分布.
3. 有一以频率 ω 振动的电偶极子,振幅为 $\boldsymbol{p}_0$. 在距它为 a 处有一与它平行的理想导体面. 设 $\lambda\gg a$,求在 $r\gg\lambda$ 处的电磁场及辐射能流.
4. 有两个频率 ω 和振幅 $\boldsymbol{p}_0$ 相同的偶极子分别位于 $z=\pm a/2$ 处. 两者均沿 z 方向振动,但相位相反. 设 $ka\ll 1$,求这系统的辐射场和辐射功率.

第 6 章 狭义相对论基础

1. S 系中不同地方的标准计时钟是对准了的. 试证明从 $\bar{S}$ 系看来它们没有对准.
2. 两把沿 x 方向相对运动的标尺,相互认为对方有 1% 的缩短,问

它们间的相对速率多大.

3. S 系中有一静长为 l_0 的管子沿 x 方向以速率 v 运动. 从管尾向前射出一高速粒子,它相对管子的速率为 u,求它到达管子前端所需的时间.
4. 用 4-速度 U_μ 的洛伦兹变换导出三维速度 $\boldsymbol{v}$ 的变换公式.
5. 某原子在静止时发出的光波的频率为 ω_0. 当它以速率 v 沿 x 方向运动,求在顺 x 方向及逆 x 方向观测到的频率.(**提示**:利用 $k_\mu=(\boldsymbol{k},\mathrm{i}\omega/c)$ 为四维矢量)
6. 已知刚体的角动量 $\boldsymbol{G}$ 和角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的关系为 $\boldsymbol{G}=\overleftrightarrow{I}\cdot\boldsymbol{\omega}$,并知道 $\boldsymbol{G}$ 和 $\boldsymbol{\omega}$ 均为三维矢量,证明转动惯量 $\overleftrightarrow{I}$ 必是三维二阶张量.
7. 一镜子向垂直镜面方向以速率 v 对 S 系运动,一平面波向此镜子斜向入射,入射角为 θ_1. 试求反射角 θ_2,角度均以 S 系为准.

第 7 章　相对论性的物理学

1. 甲乙两电子以同样的速度 v 对 S 系飞行. 它们的相对位置与速度方向垂直. 问须给两电子分别加多大的外力才能保持它们作匀速运动.
2. 试由电磁场张量 $F_{\mu\nu}$ 的洛伦兹变换式导出电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的变换公式.
3. 若按氢原子的经典模型,电子绕核作圆周运动,半径为 r_0. 试导出这模型原子的结合能和质量亏损对 r_0 的依赖关系. 当已测得其结合能 $B=13.6\,\mathrm{eV}$,相应地算出其半径 r_0 和其质量亏损 Δm 的大小.
4. 设实验室中运动质子的能量 $E_{\mathrm{p}}\gg m_{\mathrm{n}}c^2$,其中 m_{n} 是中子的静质量. 证明这时质子衰变成中子加其他粒子必违反动量的守恒.
5. 证明自由电子吸收一个光子,即 $\mathrm{e}+\gamma\rightarrow\mathrm{e}$ 必违反动量和能量都守恒的要求.

第 8 章　运动电荷的电磁场

1. 把 $S^* = R^* - \frac{\boldsymbol{v}^* \cdot \boldsymbol{R}^*}{c}$ 看成 $\boldsymbol{r}$ 和 t^* 的函数，试证明

$$\nabla_* S^* = \frac{\boldsymbol{R}^*}{R^*} - \frac{\boldsymbol{v}^*}{c} \quad 和 \quad \frac{\partial S^*}{\partial t^*} = -\left(\frac{\boldsymbol{R}^*}{R^*} - \frac{\boldsymbol{v}^*}{c}\right) \cdot \boldsymbol{v}^* - \frac{\boldsymbol{R}^* \cdot \boldsymbol{a}^*}{c},$$

其中 ∇_* 指 t^* 不变下的梯度运算.

2. 一个相对论性的电子在均匀恒定磁场 B 中作圆周运动，已知其动量大小为 p，求它的轨道半径和辐射总功率.
3. 电子被加速至 10 MeV 时的 v/c 及 γ 为多大？分 $\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{v}$ 两种情形，算出其辐射功率与同样加速度下的非相对论辐射功率之比.
4. 计算考虑辐射阻尼后的谐振子的周期平均能量，并证明这平均能量的变化率与拉莫尔公式给出的辐射功率一致.

第 9 章　介质对电磁波的影响

1. 求平面线偏振波被自由电子散射时，电波对电子所作的平均功率，并证明这平均功率等于平均散射功率.
2. 频率为 ω 的平面线偏振波入射到一个极化率为 α 的原子上，试按经典理论算出散射波的电场和磁场，并计算散射的总截面.

各章习题答案

第 1 章

4. (a) $\boldsymbol{g}_{平均}=\frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2c}\boldsymbol{e}_z$, (b) $p_{吸}=\frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}$, (c) $p_{反}=\varepsilon_0 E_0^2$.

8. $E=\frac{\rho R}{6\varepsilon_0}$,在 OO' 方向上.

9. (a) $\Sigma_{f1}=-\Sigma_{f2}=\frac{\mathscr{E}}{\frac{l_1}{\varepsilon_1}+\frac{l_2}{\varepsilon_2}}$, 介质界面上 $\Sigma_{f3}=0$.

   (b) $\Sigma_{f1}=\frac{\varepsilon_1\sigma_2\mathscr{E}}{\sigma_2 l_1+\sigma_1 l_2}$, $\Sigma_{f2}=\frac{-\varepsilon_2\sigma_1\mathscr{E}}{\sigma_2 l_1+\sigma_1 l_2}$, $\Sigma_{f3}=-\Sigma_{f1}-\Sigma_{f2}$.

第 2 章

2. $\varphi=-\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{3pl\sin\theta\cos\theta\cos\varphi}{r^3}$

3. (a) $Q=0$, $\boldsymbol{p}=q(l_1\boldsymbol{e}_x+l_2\boldsymbol{e}_y)$, $\overleftrightarrow{\boldsymbol{D}}=0$;

   $$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{l_1\sin\theta\cos\varphi+l_2\sin\theta\sin\varphi}{r^2}.$$

   (b) $Q=0$, $\boldsymbol{p}=q(2l_1\boldsymbol{e}_x+l_2\boldsymbol{e}_y)$, $\overleftrightarrow{\boldsymbol{D}}=3ql_1l_2(\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_x)$,

   $$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{2l_1\sin\theta\cos\varphi+l_2\sin\theta\sin\varphi}{r^2}.$$

4. $D_{zz}=\frac{2Q}{5}(b^2-a^2)$, $D_{xx}=D_{yy}=-\frac{D_{zz}}{2}$.

5. $$\boldsymbol{F}=\frac{-q^2}{8\pi\varepsilon}\left(\frac{\boldsymbol{e}_x}{2a^2}+\frac{\boldsymbol{e}_y}{2b^2}-\frac{a\boldsymbol{e}_x+b\boldsymbol{e}_y}{a^2+b^2}\right),$$

   $$W=\frac{-q^2}{8\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

6. $$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-l)^2}}+\frac{-q}{\sqrt{x^2+y^2+(z+l)^2}}+\frac{-q'}{\sqrt{x^2+y^2+(z-b)^2}}+\frac{q'}{\sqrt{x^2+y^2+(z+b)^2}}\right),$$

其中 $q'=qR/l, b=R^2/l$.

7. $\Sigma=\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{q+Q}{r^2}-\frac{q(R-a\cos\theta)}{(R^2-2aR\cos\theta+a^2)^{3/2}}-\frac{\frac{qR}{a}(b\cos\theta-R)}{(R^2-2bR\cos\theta+b^2)^{3/2}}\right\}$

其中 $b=R^2/a$.

8. $\varphi=\frac{A_0}{r}+\frac{A_1}{r^2}P_1(\cos\theta)+\frac{A_2}{r_3}P_2(\cos\theta)$, $\quad A_0=\frac{4R}{3}\varphi_0$,

$A_1=2R^2\varphi_0, A_2=\frac{2R^3}{3}\varphi_0$.

第 3 章

1. $\boldsymbol{B}=\frac{\mu\mu_0}{\mu-\mu_0}\frac{I}{\pi r}\boldsymbol{e}_\theta$, $\quad I_M=\frac{\mu-\mu_0}{\mu+\mu_0}I$, 沿 z 轴.

3. $m=\frac{1}{5}QR^2\omega$, $\quad \frac{m}{L}=\frac{Q}{2M}$.

4. $\boldsymbol{B}=\begin{cases}\frac{2\mu_0^2}{2\mu_0+\mu}\boldsymbol{M}, & r<R;\\ \frac{\mu_0^2R^3}{2\mu_0+\mu}\cdot\frac{3\boldsymbol{M}_0\cdot\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_r-\boldsymbol{M}_0}{r^3}, & r>R.\end{cases}$

面磁化电流 $\boldsymbol{K}_m=\frac{3\mu_0^2}{2\mu_0+\mu}M_0\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi$,在 $r=R$ 处.

5. $\boldsymbol{H}=\begin{cases}\frac{3\mu_0}{\mu+2\mu_0}\boldsymbol{H}_0, & r<a;\\ \boldsymbol{H}_0+\frac{3\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_r-\boldsymbol{m}}{4\pi r^3}, & r>a.\end{cases}$

其中 $\boldsymbol{m}=4\pi\left(\frac{\mu-\mu_0}{\mu+2\mu_0}\right)a^3\boldsymbol{H}_0$, $\quad M=\frac{m}{4\pi a^3/3}$.

6. $F=-\frac{3\mu_0m^2}{64\pi a^4}(1+\cos^2\theta)$.

第 4 章

1. $\boldsymbol{E}=\frac{E_0}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}(\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y)$,

$\boldsymbol{E}=E_{右}\,\boldsymbol{e}_{1圆}+E_{左}\,\boldsymbol{e}_{2圆}$，$E_{右}=\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}E_0$，　$E_{左}=\dfrac{1-\mathrm{i}}{2}E_0$。

2. (a) $\boldsymbol{S}_{入}=\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\mu_0}}\,|\mathrm{Re}\boldsymbol{E}|^2\boldsymbol{e}(\boldsymbol{k})$，　$\boldsymbol{S}_{反}=\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\mu_0}}\,|\mathrm{Re}\boldsymbol{E}''|^2\boldsymbol{e}(\boldsymbol{k}'')$，

$\boldsymbol{S}_{折}=\sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\mu_0}}\,|\mathrm{Re}\boldsymbol{E}'|^2\boldsymbol{e}(\boldsymbol{k}')$.

(b) $(\boldsymbol{S}_{入}+\boldsymbol{S}_{反}-\boldsymbol{S}_{折})\cdot\boldsymbol{n}=0$，$\boldsymbol{n}$ 为法向量.

(c) $(\boldsymbol{S}_{入}+\boldsymbol{S}_{反})\cdot\boldsymbol{n}=0$，$\boldsymbol{S}_{折}\cdot\boldsymbol{n}=0$.

3. 设入射波矢 $\boldsymbol{k}=(k_x,k_z)$，则透射波矢为 $\boldsymbol{k}'=(k_x,k'_{z0}+\mathrm{i}\tau)$，

$k_{z0}=\tau=\sqrt{\dfrac{\mu_0\sigma\omega}{2}}$.

5. $E_x=A_1\cos\dfrac{m\pi x}{a}\sin\dfrac{n\pi y}{b}\sin k_z z$，$E_y=A_2\sin\dfrac{m\pi x}{a}\cos\dfrac{n\pi y}{b}\sin k_z z$，

$E_z=A_3\sin\dfrac{m\pi x}{a}\cos\dfrac{n\pi y}{b}\cos k_z z$，其中 $k_z^2=\dfrac{\omega^2}{c^2}-\left(\dfrac{m\pi}{a}\right)^2-\left(\dfrac{n\pi}{b}\right)^2$.

第 5 章

1. $\boldsymbol{B}=\dfrac{\mu_0\omega^2 m_0}{4\pi c^2}(\cos\theta\boldsymbol{e}_\theta+\mathrm{i}\boldsymbol{e}_\varphi)\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}}{r}$，$\boldsymbol{E}=c\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{e}_r$，　$m_0=I_0\pi a^2$.

2. $\boldsymbol{E}=\dfrac{\mu_0\omega^2 m_0}{4\pi cr}\sin\theta\cos(kr-\omega t)\boldsymbol{e}_\varphi$，　$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_r\times\dfrac{\boldsymbol{E}}{c}$，

$\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}=\dfrac{\mu_0\omega^4 m_0^2}{32\pi^2 c^3}\sin^2\theta$，　$P=\dfrac{\mu_0\omega^4 m_0^2}{12\pi c^3}$，$m_0=I_0\pi a^2$.

3. $\boldsymbol{B}=\dfrac{\mu_0\omega^3 aP_0}{4\pi c^2}(\cos\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_\theta-\cos2\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_\varphi)\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}}{r}$，

$\boldsymbol{E}=c\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{e}_r$，　$P=\dfrac{\mu_0 a^2\omega^6 P_0^2}{20\pi c^3}$.

4. $\boldsymbol{B}=\dfrac{\mu_0\omega^3 ap_0}{4\pi c^2 r}\sin2\theta\sin(kr-\omega t)$，　$\boldsymbol{E}=c\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{e}_r$，　$P=\dfrac{\mu_0 a^2\omega^6 p_0^2}{60\pi c^3}$.

第 6 章

2. $v=0.99\,c$.

3. $t=\gamma l_0\left(\frac{1}{\mu}+\frac{v}{c^2}\right)$，　$\gamma=\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$.

5. $\omega=\sqrt{\frac{1\mp\beta}{1\pm\beta}}\,\omega_0$.

7. $\cos\theta_2=\frac{(1+\beta^2)\cos\theta_1-2\beta}{1+\beta^2-2\beta\cos\theta_1}$，　$\beta=\frac{v}{c}$.

第 7 章

1. $F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2}\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$，方向与速度方向垂直.

3. $B=\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_0^2}$，　$\Delta m=\frac{B}{c^2}$，　$r_0=0.53\cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$，

$\Delta m=2.4\times 10^{-34}\,\mathrm{g}$.

第 8 章

2. $R=\frac{p}{eB}$，　$P=\frac{e^4p^2B^2}{6\pi\varepsilon_0c^3m_0^4}$.

3. $\gamma\approx 20$，　$1-\frac{v}{c}\approx\frac{1}{800}$，　$P_{/\!/}\approx 6\cdot 10^7 P_{\mathrm{n.r.}}$，

$P_{\perp}\approx 2\cdot 10^5 P_{\mathrm{n.r.}}$.

第 9 章

1. $P=\frac{e^4E_0^2}{12\pi\varepsilon_0c^3m^2\left(1+\frac{\Gamma^2}{\omega^2}\right)}$，　$\Gamma=\frac{e^2\omega^2}{6\pi\varepsilon_0mc^3}$.

2. $\boldsymbol{E}=c\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{e}_r$，　$\boldsymbol{B}=-\frac{\alpha\omega^2\boldsymbol{E}_0\times\boldsymbol{e}_r}{4\pi c^3}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}}{r}$，　$\sigma=\frac{\alpha^2}{6\pi}\left(\frac{\omega}{c}\right)^4$.

对教师的一些说明

我想就书中各章内容主次的考虑对使用本书的教师作如下的说明。

第 1 章是整个电动力学的理论基础。真空中的和介质中的麦克斯韦方程自然是主体内容。电磁作用下的能量和动量的守恒性是推论，但它是各类电磁问题的共同基础，因此把它也作为总的理论基础的一部分。

静电问题在数学上已归结为泊松方程的求解问题。求解的方法属于应适可而止地涉及的内容。相反，唯一性定理是重要概念。它告诉我们须附加什么边条件才能确定区域内的电场。在静电问题中，特别对微观客体如分子或原子核，人们无法知道其电荷分布的全部细节，所以用泊松方程求解的办法行不通。对这类问题，多极展开是基本概念，因此它也应被看成主要内容。相应地，偶极子和四极子是重要细节。由于偶极子在一定程度上已为同学所熟悉，而四极子是没有其他基础课中会讲到的概念，所以此处有必要认真对待。

静磁问题中磁矩概念是核心。因此，磁矩概念的由来，磁矩的场及磁矩用磁荷的描述被看成是一条主要线索。对已知电流求磁场的问题归结为一个数学问题就完了，不宜过多讨论。对于磁标势概念在什么情况下才适用，让学生有正确理解是必要的。

电磁波的传播问题中，用真空中的平面波使学生对它各方面的性质有清楚的了解是最基本的。介质中波的传播与真空无大区别，两种介质的界面问题是要点。对导体中的波，它与绝缘介质中的波的差别及其物理本质是要点。波导管的问题主要是想反映导体界面对波的影响。我个人认为，后三种情形的讨论合在一起，能

使学生对波的传播问题有一个全面了解的基础。

电磁波的激发问题中，变化源产生的场由推迟解描述以及局域变化源在远处产生的是辐射场，这是两个基本概念。余下的细节中，辐射场可作多极展开是主要结果。再进一步具体化，偶极辐射的细节结果最重要，其他就较次要了。

书中的前5章包括了宏观电动力学全局中最主要的内容。

关于狭义相对论，我想强调，主体是相对性原理而不是相对论性的时空观。运动尺子的缩短和运动时钟的变慢是必须讲到的内容，但不能当主体。这里常会有主次的颠倒。狭义相对论在物理学中的重要性在于它指出了物理规律必须在洛伦兹变换下协变。为此，四维时空的张量是必要的概念。不这样讲相对论，就是没有越出通俗介绍的水平，这作为理论课是不合适的。

相对论分两章，为的是前一章讲相对论本身，后一章讲相对论对物理学的影响。相对论的影响主要在微观理论，这是本书不涉及的。在宏观物理中，相对论对电磁学没有很多有实用意义的影响。因此书中这部分内容可以讲得简单些。相对论对力学的影响主要是质能关系。对质能关系的过于简化的带出不是正确的讲法。这常是个误区。

我本人是相对论领域的专业工作者。我注意了不要把专业的偏爱带进基础教学。但实际上是否有这样的痕迹，我希望听到批评意见。

最后两章讨论的是经典电动力学在微观领域的应用。值得讲它的原因是经典理论在有些微观过程中的确依然适用。第8章中的8.1，8.2，8.3和8.5各节是很值得讲的。那里给出库仑定律对低速电荷依然适用的概念和粒子的加速会引起辐射的概念。这些概念是基本的，其中8.2节中的数学推导可以从简。其他各节和第9章可以考虑不讲。无论如何，9.4节是重要的，它给出经典电动力学一般对微观过程不适用，但在一定情况下仍能适用的物理观念。值得指出，有些宏观现象与现象背后的微观过程有直接的关系，例

如光电效应，因此反过来讲经典电动力学对一切宏观现象适用是不恰当的。

上面讲的仅是我个人的一些看法，写出来与同行教师作交流。按这样的考虑，本课程大体需讲授50学时。去年我曾在北大物理系试讲过一次。在作者前言中我已提到，习题是十分必须的，但难题并不必须。习题的数量也不必太多。在我看来，平均每章有四五道题就够了。我的想法是让每个学生必须做到的要求不宜过高。好的学生应自己对自己提出更高的要求。例如看更深的参考书或做更多类型的习题。